Sygnał

Sygnał dyskretny lub **sygnał cyfrowy** to ciąg liczb *x(n)* (czasem piszemy też $x(t_i)$ lub $x(n\Delta t)$) powstający najczęściej przez próbkowanie **sygnału analogowego** *x(t)*.

Za argument przyjmujemy najczęściej **czas** – stąd (zwłaszcza przy sygnałach okresowych) będzie mowa o **częstotliwości**. Chwilową wartość $x(t_i)$ sygnału w chwili t_i nazywamy **amplitudą**.

Słówka **amplituda** będziemy też używać przy **analizie częstotliwościowej** (**widmowej**) mówiąc o średniej amplitudzie w danej częstości. Pojawi się też wtedy pojęcie **mocy** w danym widmie definiowanej jako całka z kwadratu

$$P = \int_{\omega_1}^{\omega_2} | X(\omega) |^2 \, d\omega$$

amplitudy w danym zakresie częstości (= widmie) – ale o tym w następnych odcinkach.

Próbkując sygnał należy brać pod uwagę tzw. **częstość Nyquista**: *jeśli chcesz analizować w sygnale częstość* ω*, to próbkuj go z częstością* ***większą*** *niż* 2ω.

TW. Shannona o próbkowaniu

Jeżeli sygnał analogowy *x(t)* ma widmo ograniczone do częstości f_{max} to można go dokładnie zrekonstruować na podstawie próbek $x(n\Delta t)$ gdy częstość próbkowania przekracza $2 f_{max}$ (czyli $\Delta t \leq \frac{1}{2 f_{max}}$), korzystając ze wzoru:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t)\frac{\sin 2\pi f_{max}(t-n\Delta t)}{2\pi f_{max}(t-n\Delta t)} \quad .$$

Wniosek Zajmowanie się sygnałami cyfrowymi otrzymanymi przez próbkowanie sygnałów analogowych ma sens, gdyż zawierają one gros informacji o sygnałach oryginalnych.

W teorii (czyli np. przy opracowywaniu nowych metod) sygnały mogą być nieskończenie długie $-\propto ... t ... +\propto$, lub $-\propto ... n ... + \propto$ jednak zwykle wymaga się wtedy by sygnał miał ograniczoną energię:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\, x(n)\,|^2 < \infty \text{ czy też } \int_{-\infty}^{+\infty} |\, x(t)\,|^2 < \infty \, .$$

Systemy liniowe – przetwarzanie sygnałów

Niech **L** będzie systemem ("czarną skrzynka") przetwarzającym sygnał *x* w sygnał *y:*

$$x_1(n) \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow y_1(n)$$

$$x_2(n) \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow y_2(n)$$

jednorodność:

$$a\, x(n) \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow a\, y(n)$$

addytywność:

$$x_1(n)+ x_2(n) \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow y_1(n)+y_2(n)$$

liniowość:

$$c_1\, x_1(n)+ c_2 x_2(n) \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow c_1 y_1(n)+ c_2 y_2(n)$$

niezmienność względem przesunięcia:

$$x(n-k) \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow y(n-k)$$

DEFINICJA. Impuls jednostkowy

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & wpp \end{cases}$$

```
... 0 0 0 0 1 0 0 0 0 ...
```

Możemy zatem zapisać nasz sygnał x jako sumę:

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta_k$$

Czyli na przykład:

```
                     x = ... 3 4 2 5 ... =
(3· ... 1 0 0 0 ... =) ... 3 0 0 0 ... +
(4· ... 0 1 0 0 ... =) ... 0 4 0 0 ... +
(2· ... 0 0 1 0 ... =) ... 0 0 2 0 ... +
(5· ... 0 0 0 1 ... =) ... 0 0 0 5 ...
```

Mamy zatem:

$$y = \mathrm{L}[x] = \mathrm{L}[\Sigma_k\, x(k)\ \delta_k]$$

a z liniowości (addytywności i jednorodności) L wynika, że:

$$\mathrm{L}[\Sigma_k\, x(k)\ \delta_k] = \Sigma_k\, \mathrm{L}[x(k)\ \delta_k] = \Sigma_k\, x(k)\ \mathrm{L}[\delta_k]\ .$$

$\mathrm{L}[\delta_k]$ to jest ciągiem i nazywamy go **odpowiedzią impulsowa** systemu liniowego L.

Odpowiedź impulsowa *zależy jedynie od miejsca impulsu jednostkowego – więc **w pełni charakteryzuje dany system liniowy**.*

Jeśli przyjmniemy $h_k = \mathrm{L}[\delta_k]$ i $h = \mathrm{L}[\delta_0]$, to dowolny (n-ty) element dowolnej (h_k) odpowiedzi impulsowej możemy przedsatwić z pomocą elementu odpowiedzi h: $h_k(n) = h(n-k)$.

Mamy zatem $y = L[x] = \Sigma_k\, x(k)\, h_k$.

Przykład

Niech

`h = ... 0 0 1 3 2 0 0 ...` oraz

`x = ... 0 0 1 1 2 3 1 0 0 ...`

Wtedy:

y=

```
(1· 0 1 3 2 0 ... =) ... 0 1 3 2  0 ... +
(1· . 0 1 3 2 0 ... =) ... 0 1 3  2  0 ... +
(2· ... 0 1 3 2 0 ... =) ... 0 2  6  4 0 ... +
(3·   ... 0 1 3 2 0 ... =) ... 0  3  9 6 0 ... +
(1·     ... 0 1 3 2 0 ... =) ...  0  1 3 2 0 ... =
```

Dodajemy: `y = ... 0 1 4 5` **`11`** `14 9 2 0 ...`

Liczbę `11` otrzymaliśmy jako sumę **1**·2+**2**·3+**3**·1=11 zauważmy, że jest to suma ważona fragmentu sygnału `(1 2 3)` z wagami `(2 3 1)` zadanymi przez *h*.(jednak średnia nie jest tu średnią, bo nie jest podzielona przez 3 więc nie znormalizowana – łatwo możnaby to poprawić przyjmując `h = ... 0 1/3 3/3 2/3 0 0 ...`) rzymaliśmy

(czyli: `h(0)=1,h(1)=3,h(2)=2`) oraz

Zatem „wyjście" systemu liniowego $y = L[x] = \Sigma_k\, x(k)\, h_k$ możemy zapisać podając wzór na kolejne elementy ciągu *y* jako sumy ważone fragmentów sygnału: $y(n) = \Sigma_m\, h_0\,(m)\, x(n\text{-}m)$.

Przedstawiona tu procedura nazywa się **splotem** dwóch ciągów (sygnału x i ciągu h definiującego system liniowy). **Splot** zapisujemy często przy użyciu gwiazdki „*" czyli: $y=x*h$.

Wniosek. **Przetwarzanie sygnału** cyfrowego przez dowolny **system liniowy** da się przedstawić jako **splot** tego sygnału z pewnym ciągiem h.

W niektórych zastosowaniach od systemów liniowych wymaga się **przyczynowości** – odpowiedź systemu zależy tylko od "przeszłości" (do sumy ważonej bierzemy tylko elementy, które nie wyprzedzają sygnału) – wyraża to warunek: $h_0(n) = 0$ *dla* $n<0$

Ważnym terminem w teorii systemów liniowych jest też **stabilność** – odpowiedź systemu na ograniczony sygnał wejściowy jest sygnałem ograniczonym – jest to równoważne warunkowi: $\Sigma_m |h_0(m)| < \infty$

W dalszych seminariach zostanie omówione dokładniej jakie warunki powinien spełniać ciąg ***h*** w zależności od funkcji systemu liniowego.