Dyskretna Transformata Fouriera i Filtry Cyfrowe

Plan

1. Krótko o liczbach zespolonych
2. Ciągła TF a dyskretna TF
3. Co nam daje DFT?
4. Filtry

Liczby zespolone

- Każdą liczbę zespoloną $z = a + bi$ można przedstawić w postaci

$$z = |z|e^{i\phi}$$

gdzie $|z|$ jest modułem liczby, ϕ argumentem a $i^2 = -1$.

- Liczby zespolone można utożsamić z wektorami w $\mathbb{R}^2$

$$z = a + bi \sim (a, b)$$

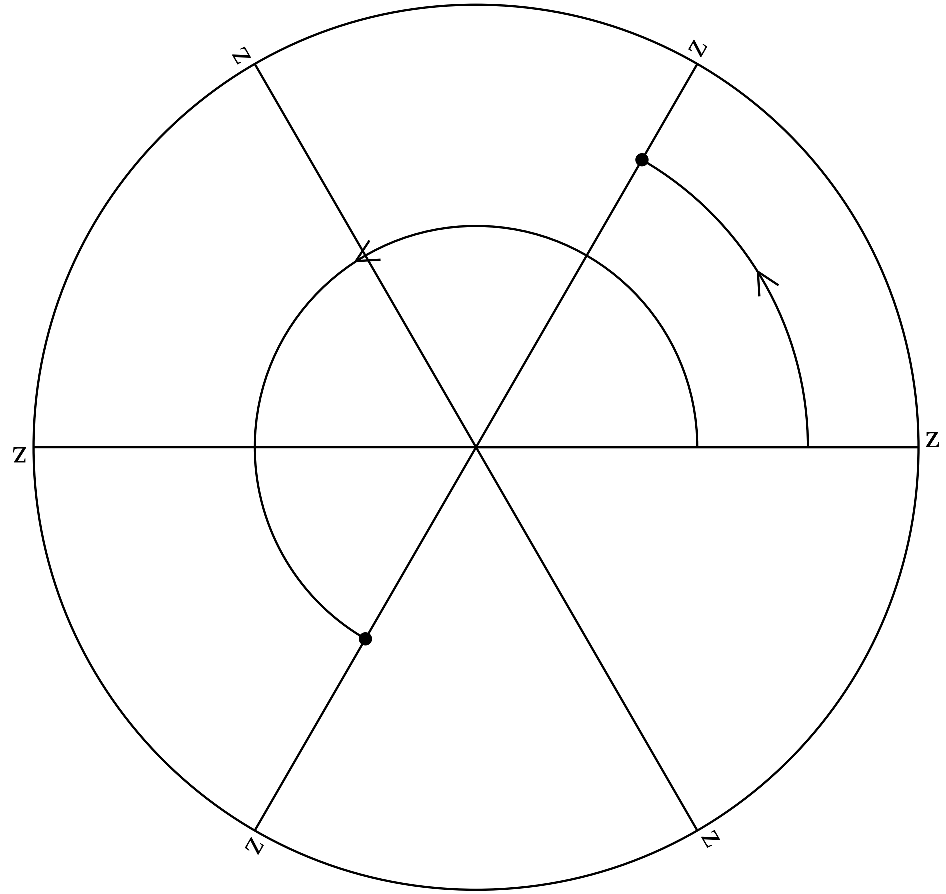
Wtedy $|z|$=długość wektora (a, b), ϕ - kąt między wektorem a osią OX.

- Rozwiązaniami równania $z^k = 1$ są liczby zespolone postaci

$$z_l = e^{i\frac{2\pi}{k}l} = (z_1)^l$$

Pierwiastki z jedynki na płaszczyźnie

OKRESOWOŚĆ



Dziedzina czasu i częstotliwości

Rozważmy pewien sygnał x będący funkcją w czasie (np. potencjały). *Ciągłą Transformatą Fouriera* tego sygnału nazywamy przekształcenie postaci

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

gdzie f jest "częstotliwością". Mamy zatem dualną reprezentację sygnału

$$x(t) \sim X(f)$$

Dyskretna Transformata Fouriera (DFT)

Niech $x(n) = x(nt_s)$ będzie spróbkowanym sygnałem $x(t)$. *Dyskretną Transformatą Fouriera* dyskretnego sygnału x nazywamy ciąg X zdefiniowany równaniem

$$X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-i2\pi fn}$$

Dla ciągów o skończonym czasie trwania $x(n) = 0$ dla $n < 0$ oraz $n > N$ dla pewnego N powyższy wzór można zapisać następująco

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N} x(n) e^{-i2\pi fn}$$

Dyskretna Transformata Fouriera (DFT) c.d.

Przyjmując $f = \frac{2\pi}{N}$ otrzymujemy, następującą dualną reprezentację dyskretnego sygnału x o skończonym czasie trwania

$$x \sim X$$

gdzie ciąg X jest zdefiniowany wzorem

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N} x(n) e^{-i\frac{2\pi m}{N} n}$$

Odwrotna Transformata Fouriera

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N} X(m) e^{i\frac{2\pi n}{N} m}$$

Własności DFT

- Liniowość. Jeśli $y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ to wtedy
$$Y(m) = aX_1(m) + bX_2(m)$$
- DFT sygnału przesuniętego $\tilde{x}(n) = x(n-k)$
$$\tilde{X}(m) = e^{j\frac{2\pi m}{N}} X(m)$$
- Dla ciągów rzeczywistych DFT jest symetryczna $\Rightarrow$ wystarczy tylko połowa próbek ciągu X
- Istnieje szybki algorytm wyznaczania DFT. Jest on znany pod nazwą *Fast Fourier Transform (FFT)* lub *Szybkie Przekształcenie Fouriera.*

Co można odczytać z DFT?

- Jeśli sygnał $x(n)$ jest spróbkowany z częstotliwością f_s to wtedy $X(m)$ opisuje częstotliwość

$$f(m) = \frac{mf_s}{N}$$

- Manipulując długością ciągu N (np. poprzed dodanie zer) możemy uzyskać większą rozdzielczość DFT.
- Trzeba pamiętać, że DFT jest jedynie APROKSYMACJĄ, tzn. daje prawidłowe wyniki jedynie wtedy, gdy ciąg danych wejściowych zawiera energię rozłożoną dokładnie przy częstotliwościach będących całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości $\frac{f_s}{N}$ $\Rightarrow$ należy stosować okienkowanie.

Co można odczytać z DFT? (przykład)

Niech $f_s = \frac{1}{8000}$ - częstotliwość próbkowania (w próbkach na sekundę), wtedy $t_s = 1/f_s = 8000$ - szybkość próbkowania. Niech dyskretny sygnał x będzie zdefiniowany wzorem

$$x(n) = \sin(2\pi 1000 n t_s) + \frac{1}{2}\sin\left(2\pi 2000 n t_s + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Przyjmując $N = 8$ otrzymujemy, że

$$\begin{array}{rr} x(0) = 0,3535 & x(1) = 0,3535 \\ x(2) = 0,6464 & x(3) = 1,0607 \\ x(4) = 0,3535 & x(5) = -1,0607 \\ x(6) = -1,3535 & x(7) = -0,3535 \end{array}$$

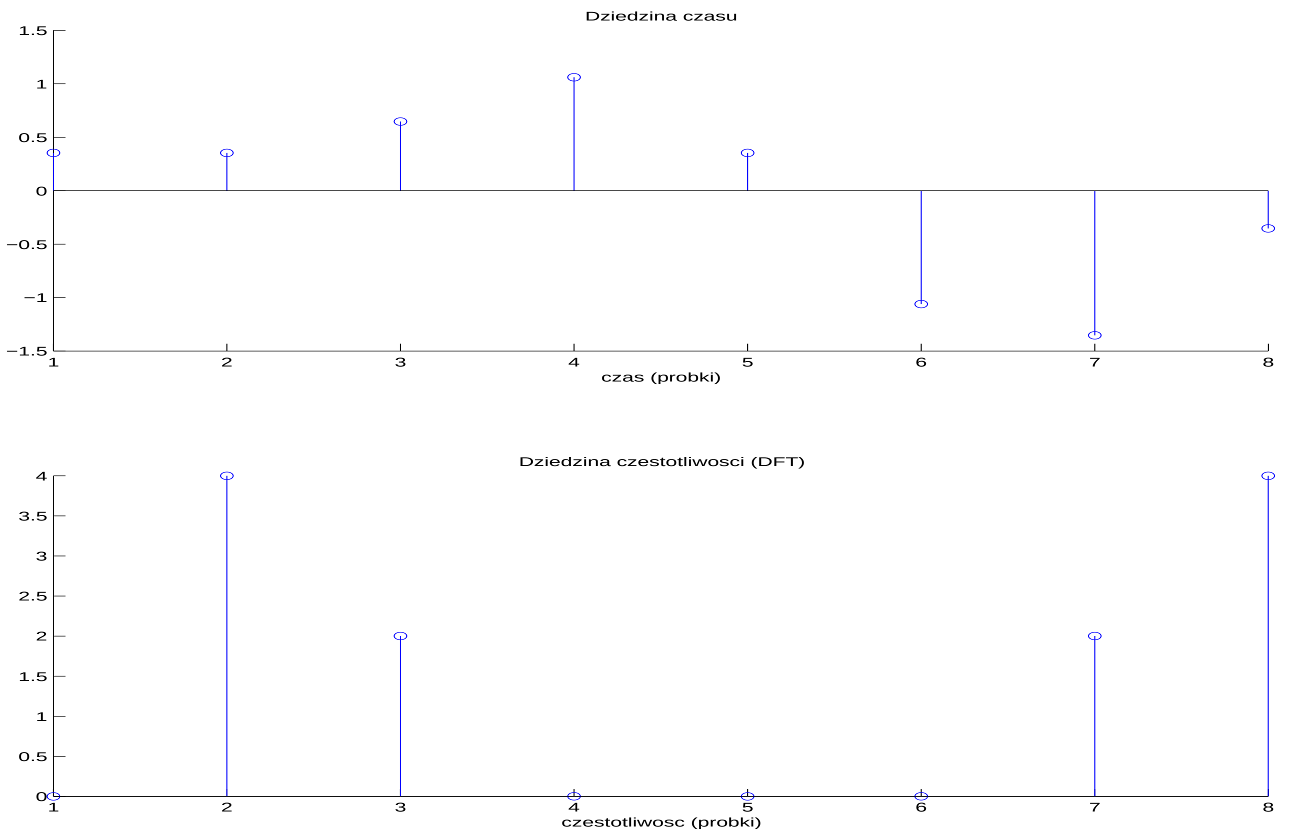
Co można odczytać z DFT? (przykład)

Oznaczmy przez $\omega_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$

$$\begin{aligned} X(1) &= 0,3535(\omega_N^0)^1 + 0,3535(\omega_N^1)^1 + \\ &+ 0,6464(\omega_N^2)^1 + 1,0607(\omega_N^3)^1 + \\ &+ 0,3535(\omega_N^4)^1 + (-1,0607)(\omega_N^5)^1 + \\ &+ (-1,3535)(\omega_N^6)^1 + (-0,3535)(\omega_N^7)^1 = \\ &= 0 - 4i \end{aligned}$$

Podobnie można wyliczyć $X(m)$ dla $m = 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Co można odczytać z DFT? (przykład) c.d.



Twierdzenie o splocie

Niech będzie dany ciąg h definiujący pewien dyskretny system liniowy. Przez x oznaczę sygnał "oryginalny" a przez y sygnał "przetworzony".

$$x \rightarrow_h y$$

Z poprzedniego referatu wiemy, że $y = h * x$ (splot) Można udowodnić, że zachodzi następująca relacja

$$Y(m) = H(m)X(m)$$

Podobnie, jeśli Y=H*X to wtedy

$$y(n) = h(n)x(n)$$

Filtry cyfrowe

Postać ogólna filtru cyfrowego

$$y(n) = \sum_{k=1}^{L} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Ciąg jest zdefiniowany przez dwa ciągi liczb

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \ldots, a_L) \\ b &= (b_1, \ldots, b_M) \end{aligned}$$

Wyróżnia się dwa rodzaje filtrów cyfrowych

- Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR) - $a_k = 0$
- Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR)

Filtry cyfrowe - transmitancja

Stosując DFT do obu stron równania

$$y(n) = \sum_{k=1}^{L} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

otrzymujemy, że

$$Y(m) = A(m)Y(m) + B(m)X(m)$$

co daje

$$Y(m) = \frac{B(m)}{1 - A(m)} X(m) = T(m)X(m)$$

Ciąg $T(m)$ nazywamy transmitancją.

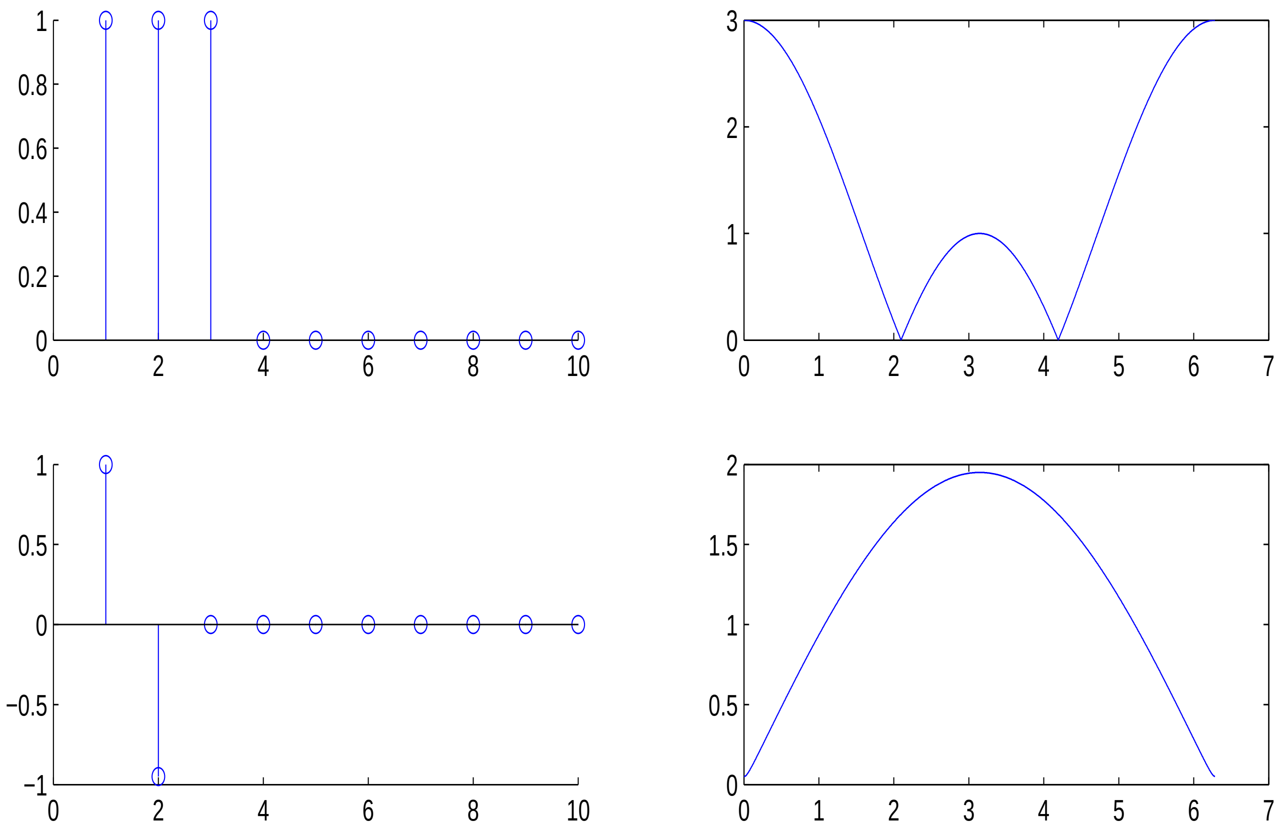
Filtry cyfrowe - przykład (preemfaza)

Preemfaza jest filtrem stosowanym do uwypuklania większych częstotliwości w sygnale mowy (ale nie tylko). Niech

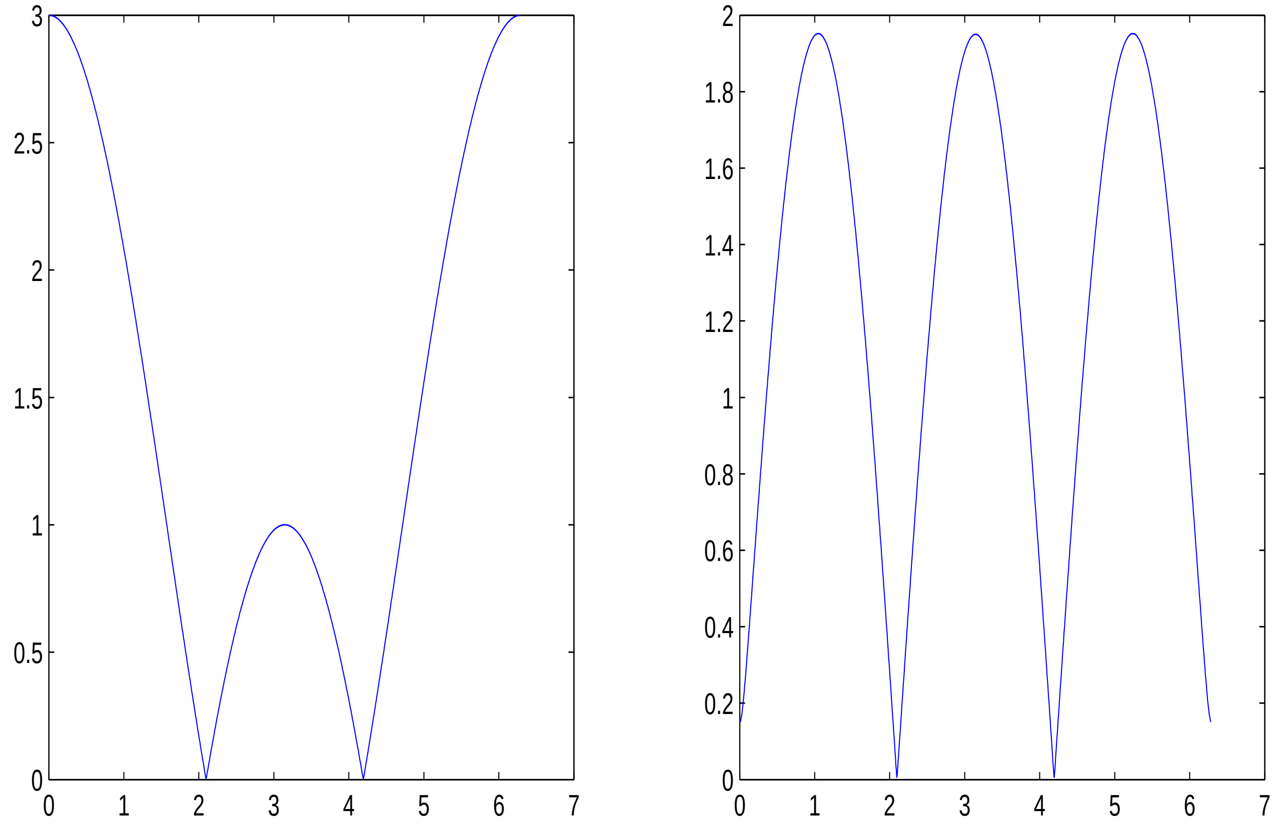
$$y(n) = x(n) - \mu x(n-1)$$

gdzie $\mu \in [0,9;1]$.

Filtry cyfrowe - przykład (preemfaza) - przed filtracją



Filtry cyfrowe - przykład (preemfaza) - po filtracji



Filtry cyfrowe - porównanie

Własność	**NOI**	**SOI**
Koszt	mały	duży
Stabliność	Musi być projektowana	Zagwarantowana
Liniowość fazy	Nie	Tak (projektowana)