

MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik

Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 5892 424

<http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/>

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula
Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002



Informacja i niepewność

- Matematyczna teoria informacji zajmuje się pojemnością kanału transmisji informacji, zupełnie abstrahuje od znaczenia, wartości i sensu przekazywanej informacji.
- Informacja i niepewność to dwie strony tego samego medalu: zdobywając informację usuwamy niepewność i na odwrót, tracąc informację powiększamy niepewność.
- Im większa niepewność co do poszukiwanego wyniku, tym więcej informacji zdobywamy poznając ten wynik.

Bit

- Miarą informacji jest **bit** – skrót od binary digit. Jest to miara informacji otrzymanej w odpowiedzi na **elementarne pytanie**, to jest pytanie na które odpowiedź może brzmieć tylko „tak” lub „nie”.
- Większe jednostki to **bajt, kilobajt, megabajt**, itd.
- UWAGA:
kilometr to $1000=10^3$ metrów
kilobajt to $1024 = 2^{10}$ bajtów

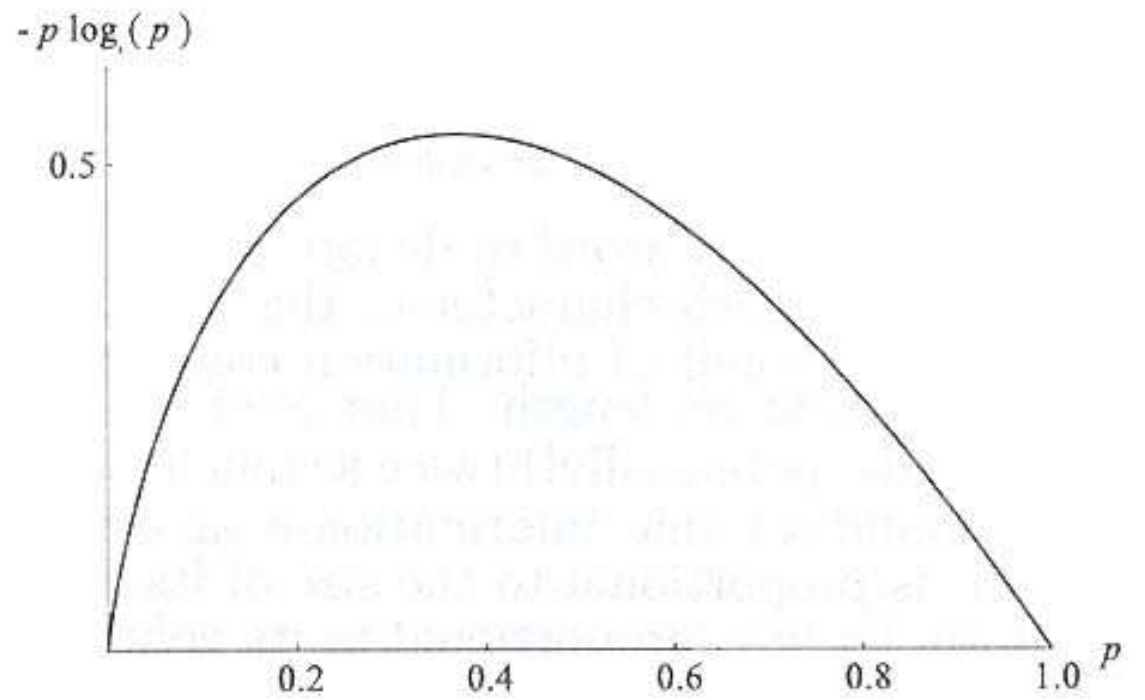
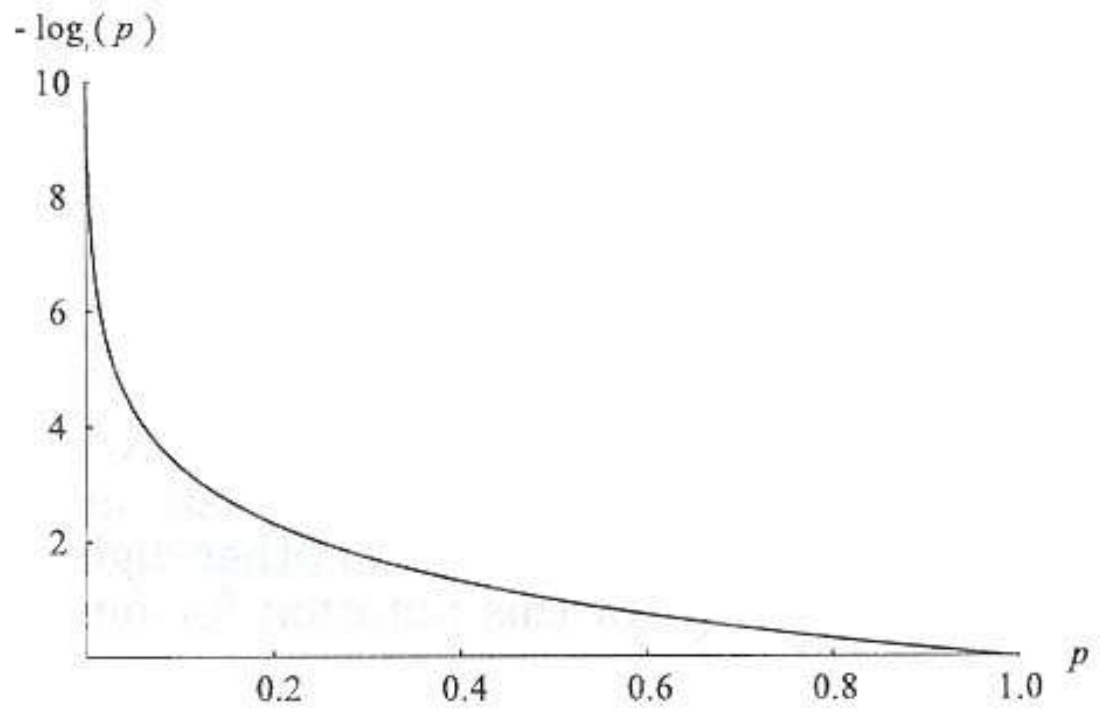
Wzór Shannona

- Zawartość informacyjna przekazu złożonego z n znaków wyrażona jest przez prawdopodobieństwa występowania tych znaków p_i

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 (p_i)$$

- Wielkość H oznacza informację mierzoną w bitach. Nazywa się ją **entropią informacyjną**.

$P \log(P)$



Własności informacji

- Informacja, jaka może być zawarta w danym ciągu znaków jest proporcjonalna do długości tego ciągu. (Informacja jest wielkością **ekstensywną**)
- Przyjmijmy, że informacja jest zapisana w alfabecie binarnym (0,1)
- Słowem binarnym jest ciąg zer i jedynek o długości N . Liczba N mierzy objętość nośnika informacji. Informacja zawarta w słowie jest proporcjonalna do N .

Dlaczego logarytm

- Wybieramy jednostkę informacji tak, że

Informacja $H = \text{Długość_słowa_binarnego}$

Przy takim wyborze słowo złożone z jednego znaku niesie jeden bit informacji.

- Istnieje 2^N słów binarnych o długości N znaków. Zatem

$\text{Długość_słowa} = \log_2 (\text{Liczba_słów})$

Dlaczego logarytm cd

- Jeżeli prawdopodobieństwo wystąpienia każdego słowa jest takie samo, to wynosi ono

$$p = 1 / \text{Liczba_sł\u00f3w}$$

- Wobec tego informacja zawarta w pojedynczym słowie wynosi

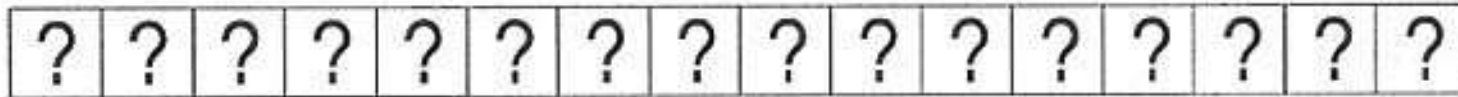
$$H = - \log_2 (p)$$

Gra w 20 pytań

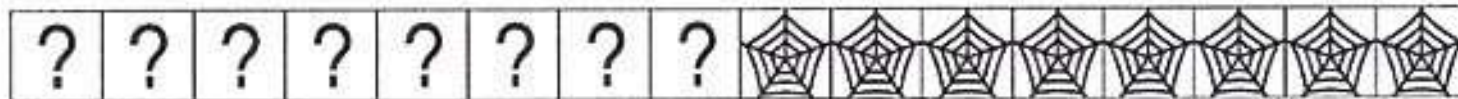
- Miara informacji jest równa liczbie pytań potrzebnych do odgadnięcia słowa
- Rozważmy uproszczoną sytuację, kiedy jest 2^N równoprawdopodobnych słów o długości N . Ponumerujmy je wszystkimi liczbami naturalnymi od 1 do 2^N .
- Mamy 2^N zakrytych komórek. W jednej z nich jest „skarbu”. Znalezienie „skarbu” jest tym samym co odgadnięcie słowa.

Najprostsza strategia

Initially we know nothing:



After the first question we know:



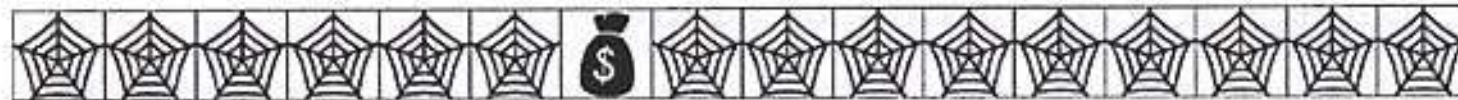
After the second question we know:



After the third question we know:



After four questions we know where the treasure is:



20 pytań cd

- Liczba pytań potrzebna do uzyskania pełnej informacji równa jest początkowej niepewności
- Na ogół prawdopodobieństwa wystąpienia różnych słów nie są takie same.
- Kiedy mamy odgadnąć słowo postaci KU_A nie wiemy, czy jest to KUFA, KULA, KUMA, KUNA, KUPA czy KURA.
- Kiedy mamy słowo postaci ŚW_T, to nie ma problemu.

Rozkład 1

- Rozważmy skarb ukryty w jednej z 4 komórek, z prawdopodobieństwami $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.125$, $p_4 = 0.125$
- Pierwotna strategia daje średnio 2 pytania do osiągnięcia sukcesu
- Lepsza strategia:
 - Czy skarb jest w pierwszej komórce?
 - Czy skarb jest w drugiej komórce?
 - Czy skarb jest w trzeciej komórce?
- Średnio prowadzi ona do $1*0.5+2*0.25+3*0.25=7/4 < 2$ pytań zatem jest lepsza od bisekcji.

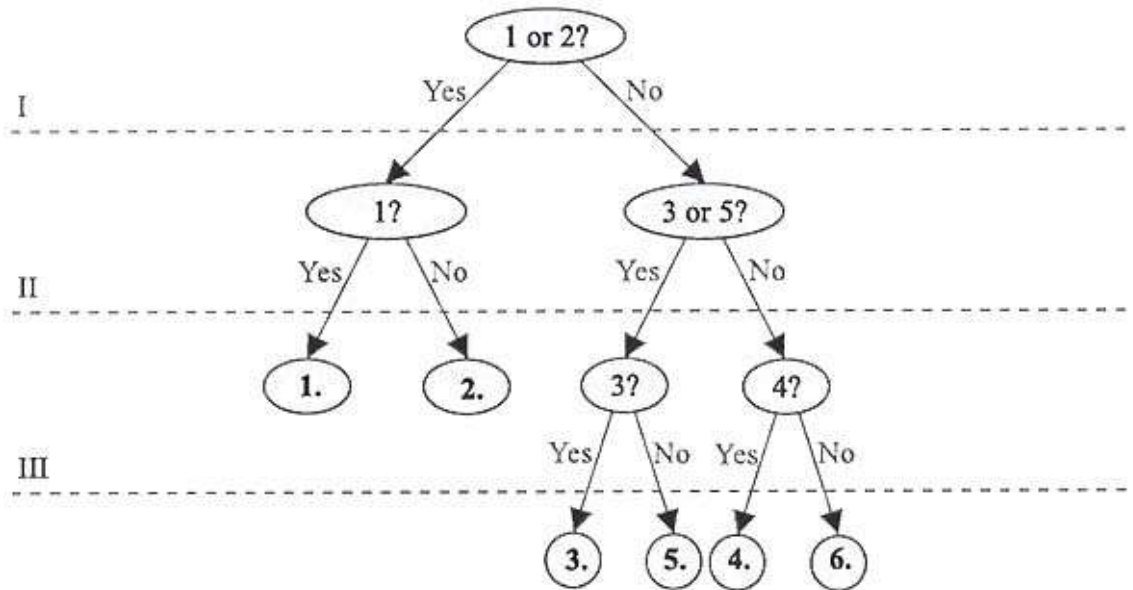
Rozkład 2

- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:

$$p_1 = 1/3, \quad p_2 = 1/5, \quad p_3 = 1/5,$$

$$p_4 = 2/15, \quad p_5 = 1/15, \quad p_6 = 1/15$$

Średnia liczba
pytań wynosi tu
 $37/15$



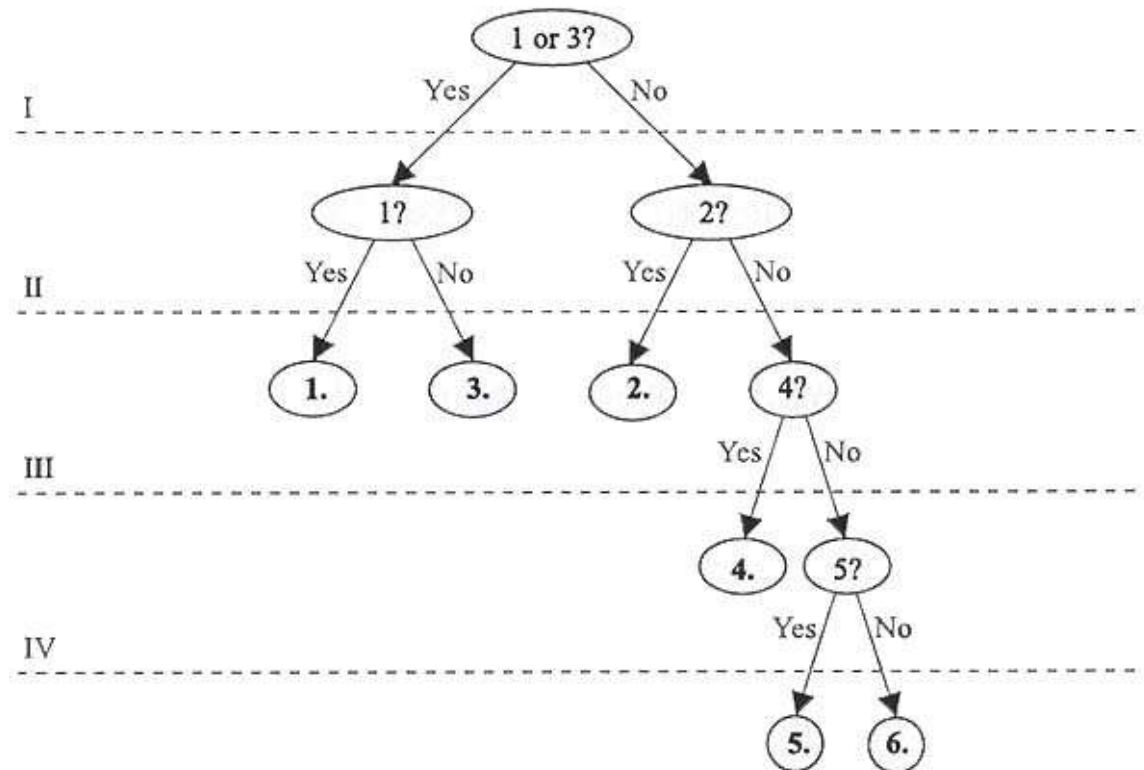
Rozkład 2 – druga strategia

- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:

$$p_1 = 1/3, \quad p_2 = 1/5, \quad p_3 = 1/5,$$

$$p_4 = 2/15, \quad p_5 = 1/15, \quad p_6 = 1/15$$

Średnia liczba
pytań wynosi tu
 $36/15$



Optymalna strategia – algorytm Huffmana

- Z początkowego rozkładu $p^0_1, p^0_2, \dots, p^0_n$ wybieramy dwa najmniej prawdopodobne zdarzenia p^0_i oraz p^0_j .
- Łączymy je w jedno o prawdopodobieństwie p^1_k , mamy nowy rozkład $p^1_1, p^1_2, \dots, p^1_{n-1}$
- Powtarzamy procedurę $n-1$ razy
- W ten sposób, od dołu, powstaje optymalne drzewo pytań.

Przykład działania strategii

- Zaczynamy od rozkładu $p^0_1=1/3$, $p^0_2=1/5$, $p^0_3=1/5$, $p^0_4=2/15$, $p^0_5=1/15$, $p^0_6=1/15$
- Łączymy p^0_5 i p^0_6 w p^1_5 . Dostajemy:
 $p^1_1=1/3$, $p^1_2=1/5$, $p^1_3=1/5$, $p^1_4=2/15$, $p^1_5=2/15$
- Łączymy p^1_4 i p^1_5 w p^2_4 . Dostajemy:
 $p^2_1=1/3$, $p^2_2=1/5$, $p^2_3=1/5$, $p^2_4=4/15$
- Łączymy p^2_2 i p^2_3 w p^3_3 . Dostajemy:
 $p^3_1=1/3$, $p^3_2=4/15$, $p^3_3=6/15$
- Łączymy p^3_1 i p^3_2 w p^4_2 . Dostajemy:
 $p^4_1=9/15$, $p^4_2=6/15$

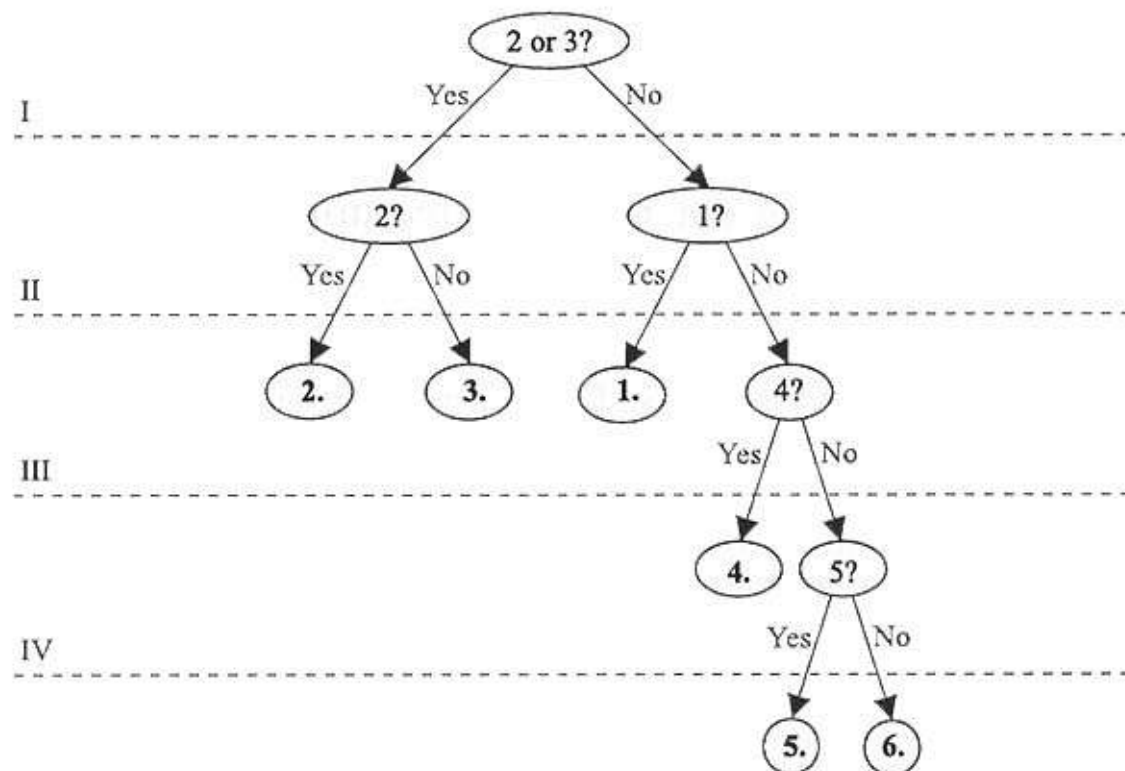
Rozkład 2 – trzecia strategia

- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:

$$p_1 = 1/3, \quad p_2 = 1/5, \quad p_3 = 1/5,$$

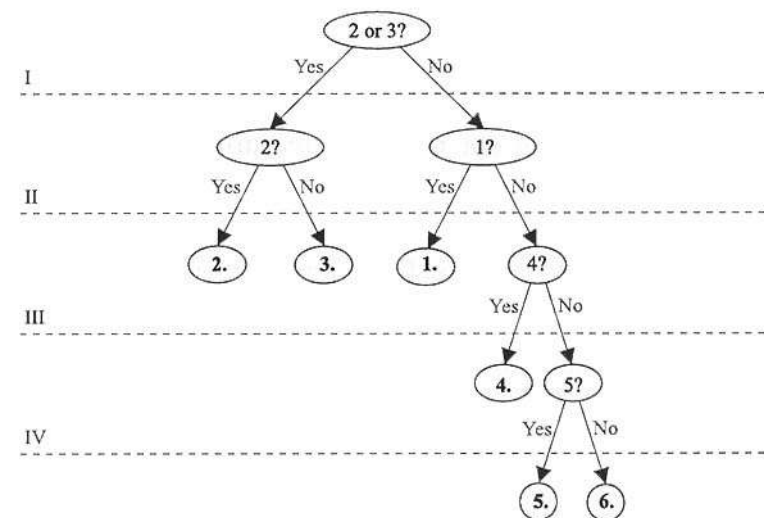
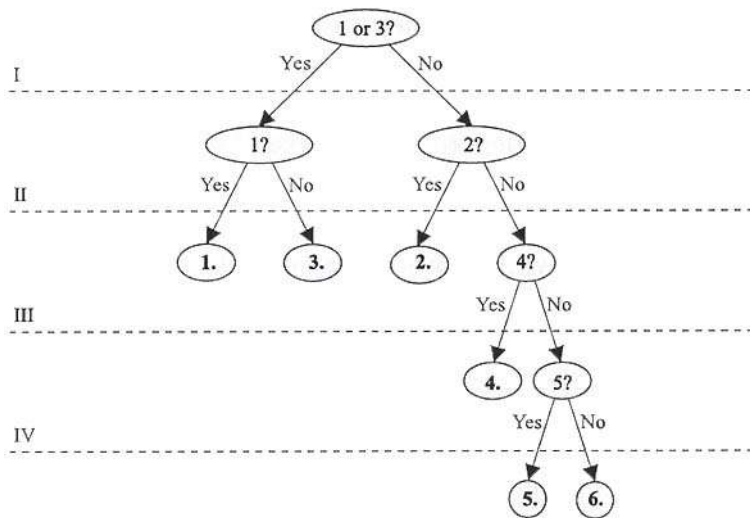
$$p_4 = 2/15, \quad p_5 = 1/15, \quad p_6 = 1/15$$

Średnia liczba pytań wynosi tu również $36/15$



Porównanie dwóch ostatnich strategii

- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:
 $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 1/5$,
 $p_4 = 2/15$, $p_5 = 1/15$, $p_6 = 1/15$



Średnia liczba pytań wynosi dla obu strategii $36/15$

Średnia informacja

- Nasze rozważania pokazują, że entropia Shannona mierzy średnią informację obliczoną w przypadku, gdy znane są wszystkie prawdopodobieństwa elementarne.
- Ogólne twierdzenie o bezszumowym kodowaniu możemy sformułować tak:

Nie istnieje strategia o średnio mniejszej liczbie pytań niż entropia Shannona

Doświadczenia Hymana

- R. Hyman pokazał, że czas reakcji na bodźce o określonej zawartości informacji jest proporcjonalny do entropii Shannona.
- Program **Hyman**

Układ dynamiczny

- *Układ*: zbiór obiektów, których zmiany w czasie chcemy badać
- *Dynamiczny*: zmieniający się w czasie zgodnie z pewną regułą

Typy układów dynamicznych

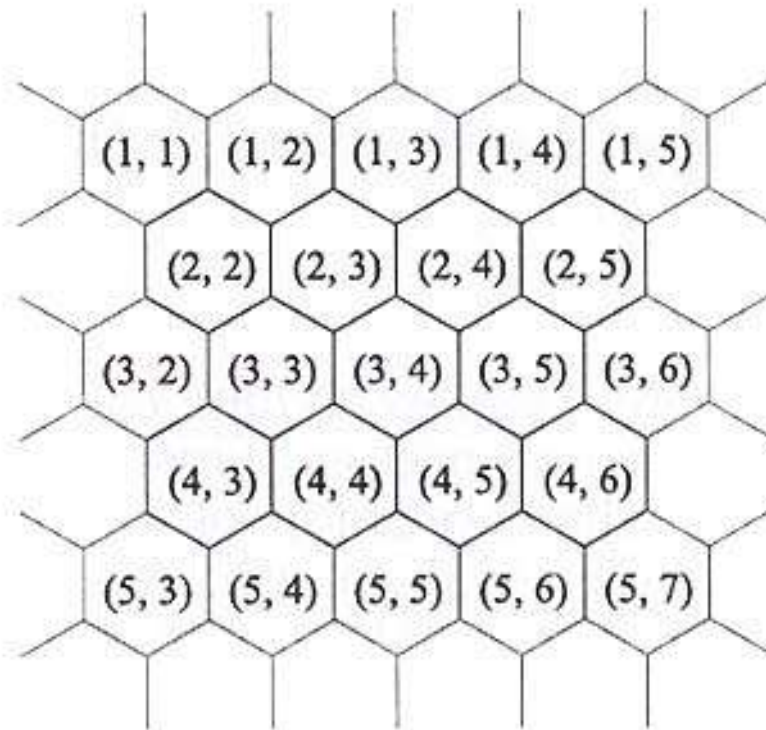
- Układy deterministyczne
 - Układy autonomiczne
 - Układy zależne od czasu
- Układy losowe (stochastyczne)

Przykład 1: Wyborcy

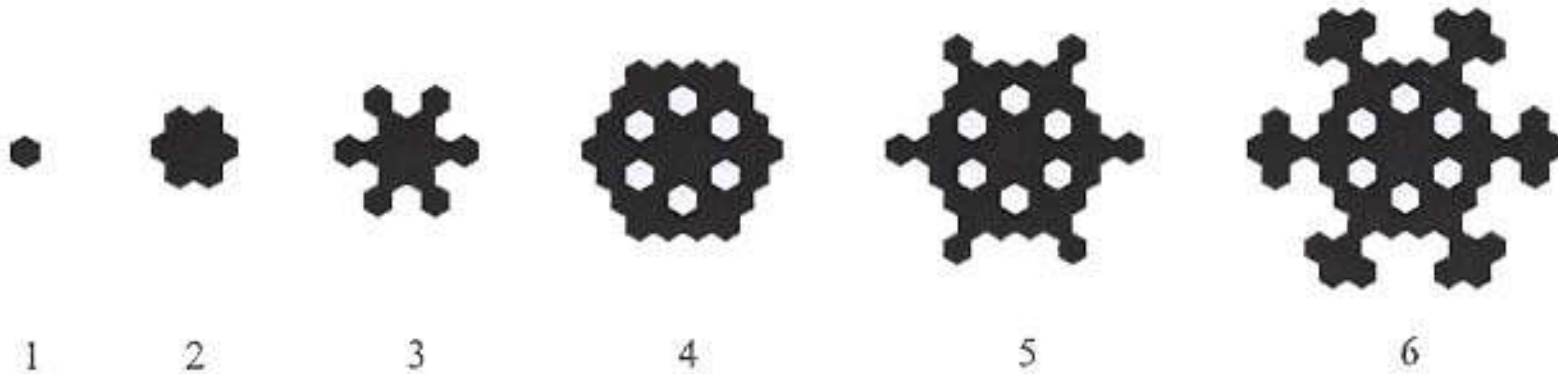
- *Stan układu:* Preferencje wyborcze grupy respondentów
- *Ewolucja:* Zmiany preferencji następują na skutek kontaktów międzyludzkich

Przykład 2: Płatek śniegu

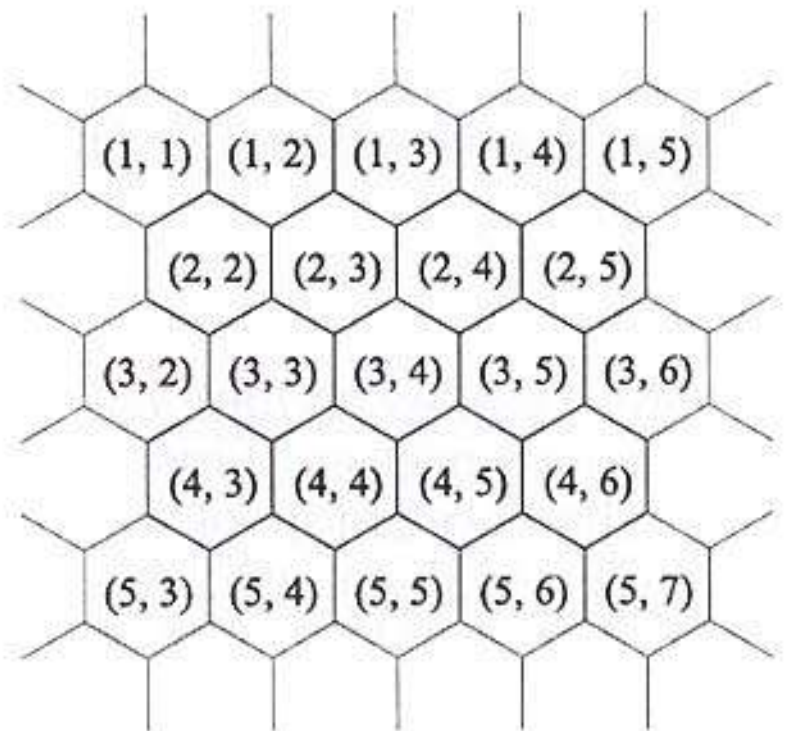
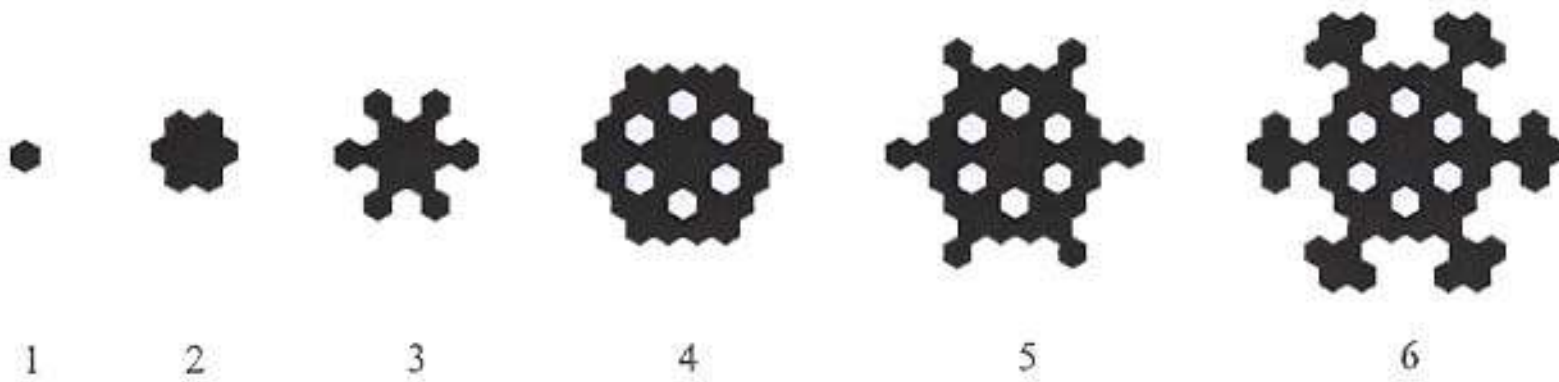
- Automat komórkowy na sieci o strukturze plastra miodu
- Ten sam stan początkowy zawsze daje ten sam stan końcowy (układ deterministyczny)



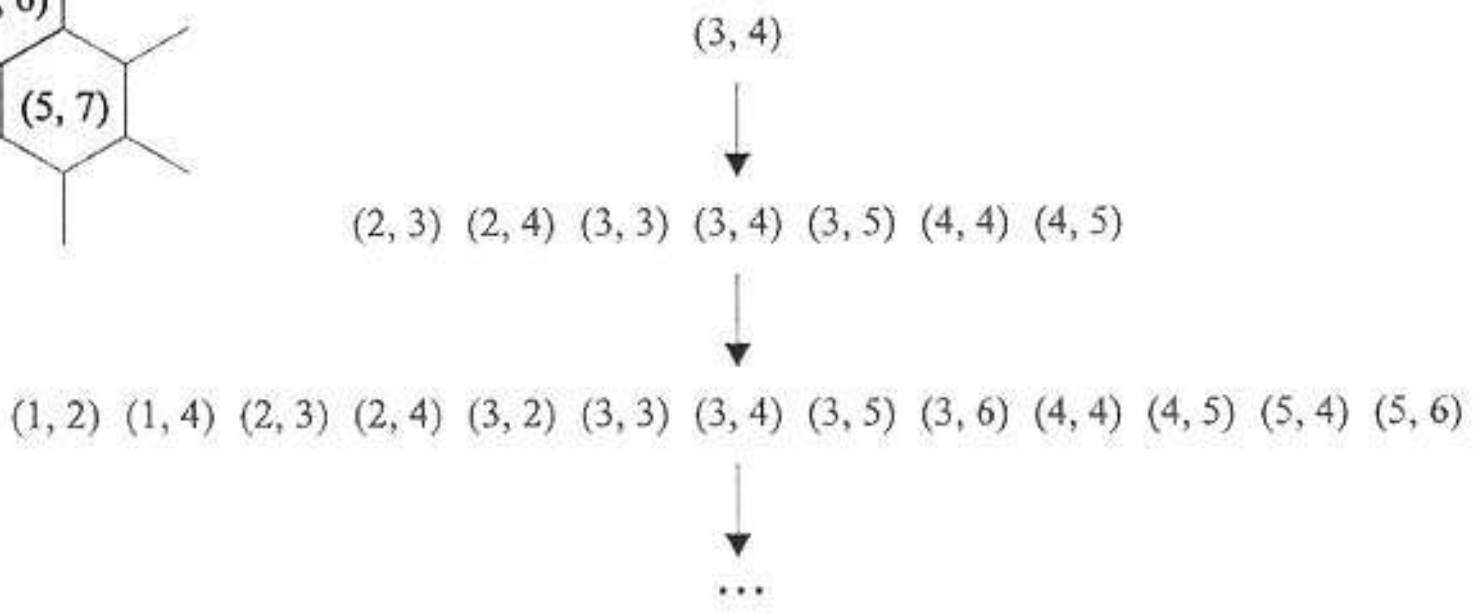
Płatek śniegu



Reguła: Nowy fragment powstaje w komórce sieci, która ma dokładnie jednego zmarzniętego sąsiada



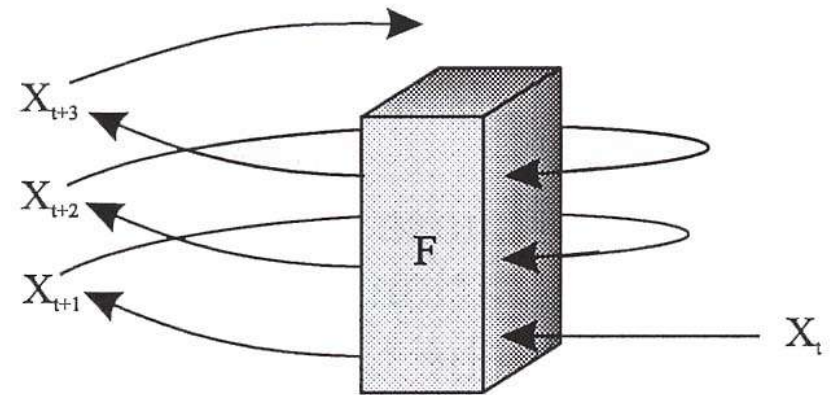
Platek śniegu



Ewolucja układu dynamicznego

- Rozwój w czasie układu dynamicznego opisuje równanie ewolucji w postaci wzoru iteracyjnego

$$X_{n+1} = F_p(X_n)$$



- X_n i X_{n+1} opisują stan układu w chwili n i $n+1$
- F_p określa jakim zmianom ulega stan układu w kolejnych krokach iteracji

Przykład 3: algorytm Newtona

- Jak policzyć pierwiastek z a ?
- Należy wybrać dowolną liczbę i iterować ją zgodnie z regułą

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

- Dlaczego?
Jeżeli $x < \sqrt{a}$ to $\sqrt{a} * x < a$, a więc $\frac{a}{x} > \sqrt{a}$
i na odwrót.

Przykład 3: pierwiastek z 2

- Weźmy $x_0=2$
- Wtedy
 - $x_1=1,5$
 - $x_2=1,416$
 - $x_3=1,414215$
 - $x_4=1,414213562374$
 - $x_5=1,414213562373095048801689$
 - ...
- I tak dalej

Kilka pojęć

- *Punkt stały*: stan układu, który się nie zmienia z czasem
- *Atraktor*: stan, do którego układ dąży z czasem
- *Dorzecze (basen) atraktora*: zbiór stanów początkowych, które dążą do danego atraktora

Przykład basenów atraktora

- Rozważmy odwzorowanie płaszczyzny

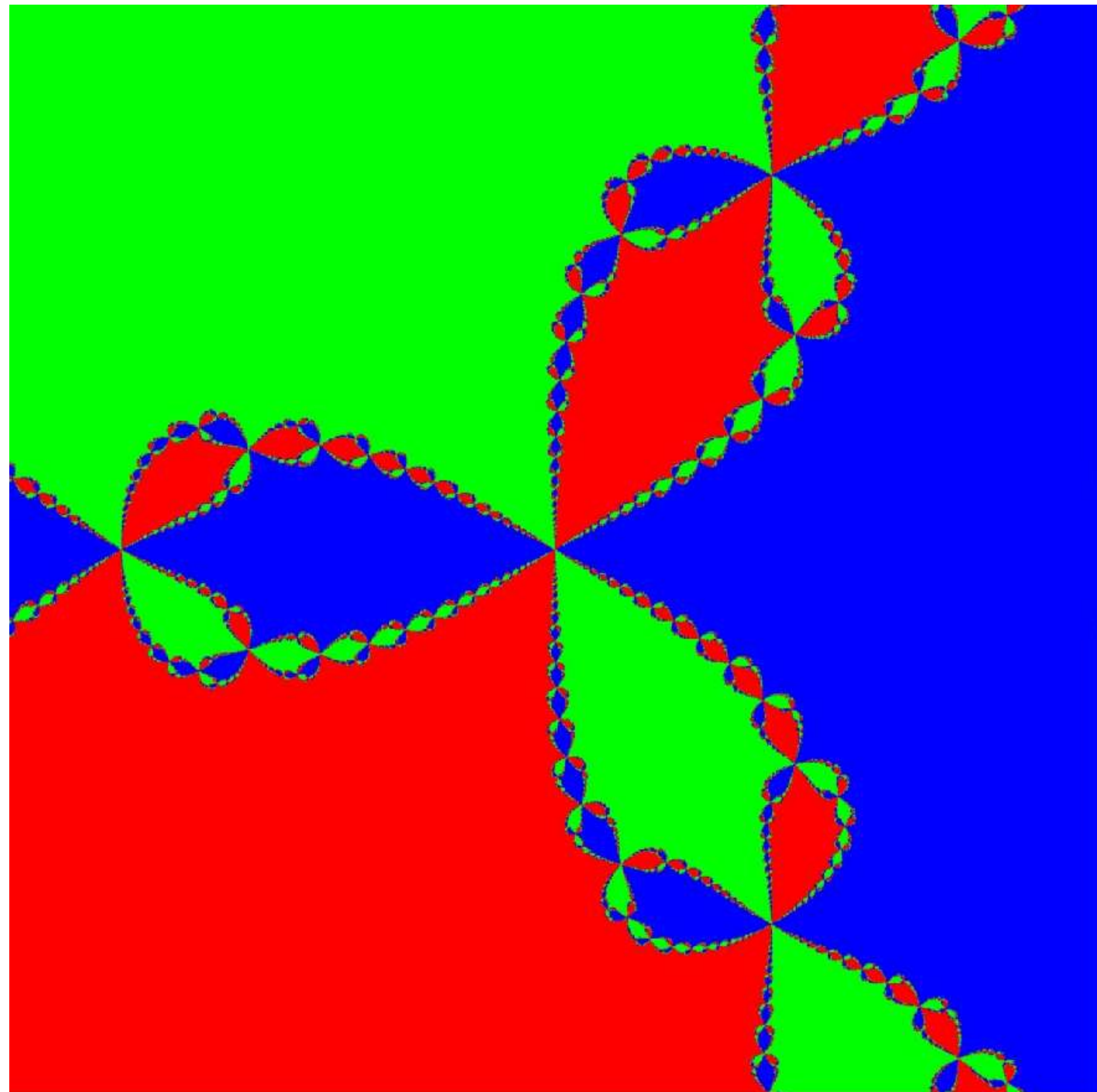
$$x_{t+1} = \frac{2}{3} x_t + \frac{1}{3} \frac{x_t^2 - y_t^2}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$

$$y_{t+1} = \frac{2}{3} y_t - \frac{1}{3} \frac{2 x_t y_t}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$

- To odwzorowanie ma trzy atraktory:

$$(1,0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

Baseny
pierwiastków
jedynki



Model Ehrenfesta: psy i pchły

- N pcheł siedzi na dwóch psach: na Azorze A_n , a na Burku B_n
- Co chwilę jedna z pcheł podejmuje decyzję o przeskoku z jednego psa na drugiego
- Jak zmienia się rozkład pcheł?
 $A_{n+1} = A_n - 1$ z prawdopodobieństwem A_n/N
 $A_{n+1} = A_n + 1$ z prawdopodobieństwem $(N-A_n)/N$

Determinizm a losowość

- Większość procesów w przyrodzie ma składowe deterministyczną i losową
- Jeżeli „szum” jest nieduży, modelujemy układ jako ściśle deterministyczny
- Jeżeli „szum” jest dominujący, modelujemy układ jako proces stochastyczny

W ogólności

- Jesteśmy bez szans...

Chaos deterministyczny

- Proste iteracje odwzorowań:
 - Funkcja liniowa
 - Funkcja logistyczna
- Układy z ciągłym czasem
- Wpływ topologii na ewolucję

Przykład: funkcja liniowa

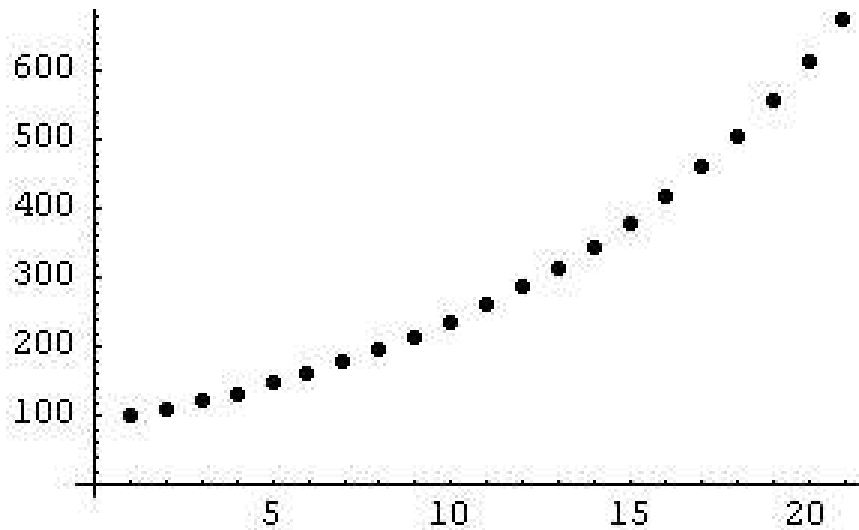
- Rozważmy populację much. Oznaczmy liczbę much w roku n -tym przez x_n . Załóżmy, że na każdą muchę w pokoleniu n średnio przypada R much w pokoleniu następnym. Wtedy ewolucja much jest dana przez:

$$x_{n+1} = R x_n$$

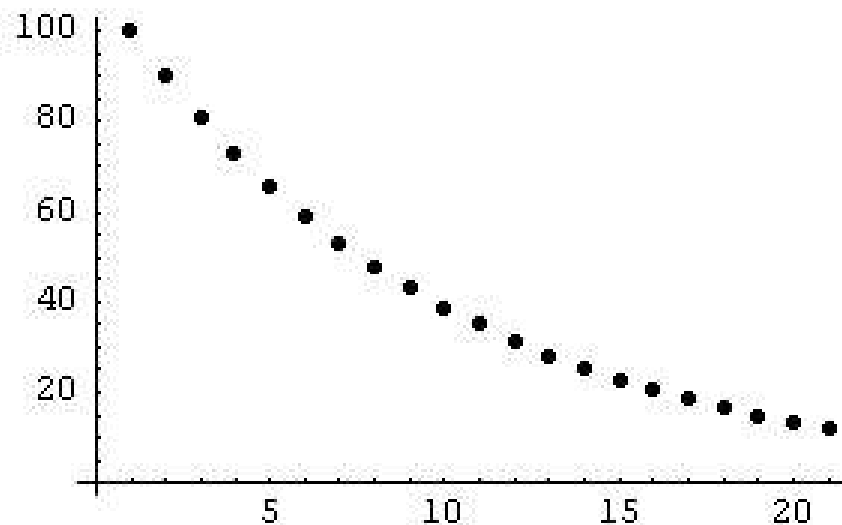
$$x_n = R^n x_0$$

Przykład: funkcja liniowa

- Stały wzrost ($R > 1$)



- Stały rozpad ($R < 1$)



Przykład: funkcja logistyczna

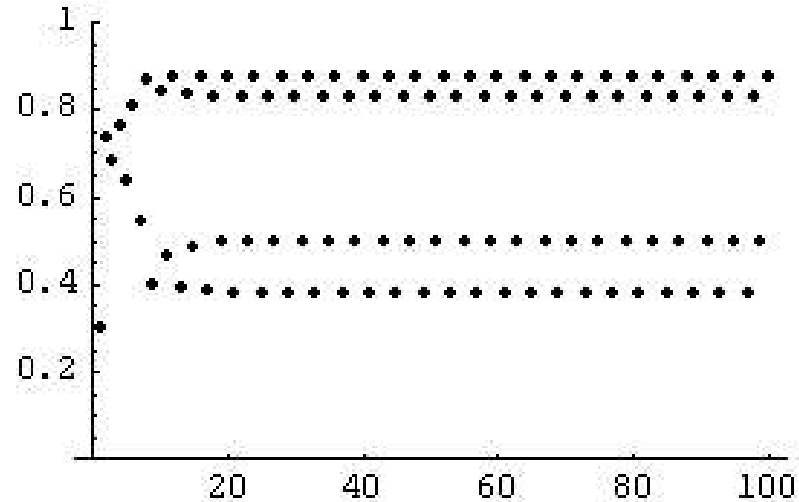
Model liniowy jest zbyt dużym uproszczeniem. Wzrost populacji zwykle ograniczony jest przez czynniki zewnętrzne: drapieżców, ograniczone zasoby, itp. Biorąc pod uwagę skończoną ilość dostępnego pożywienia dostajemy model zwany logistycznym. Jeżeli wzrost R jest pomniejszony o wielkość proporcjonalną do x_n to dostajemy:

$$x_{n+1} = (R - a x_n) x_n$$

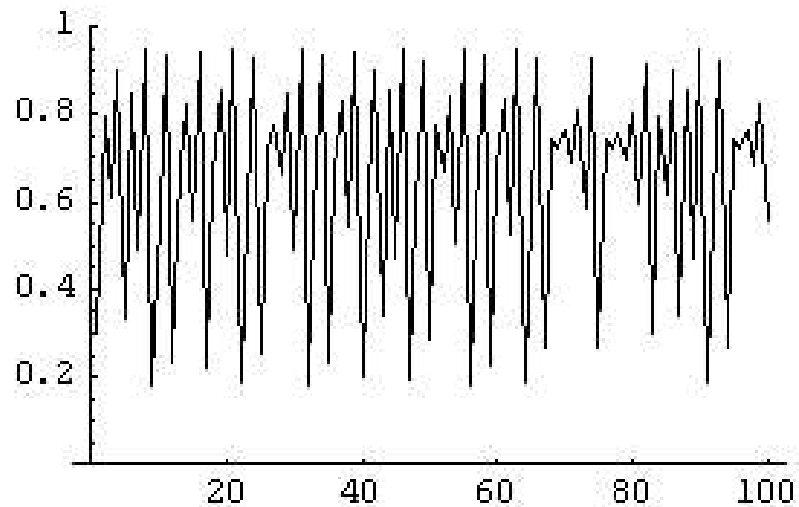
$$y_{n+1} = r (1 - y_n) y_n$$

Szereg czasowy

- W obszarze regularnym ($r = 3.5$)

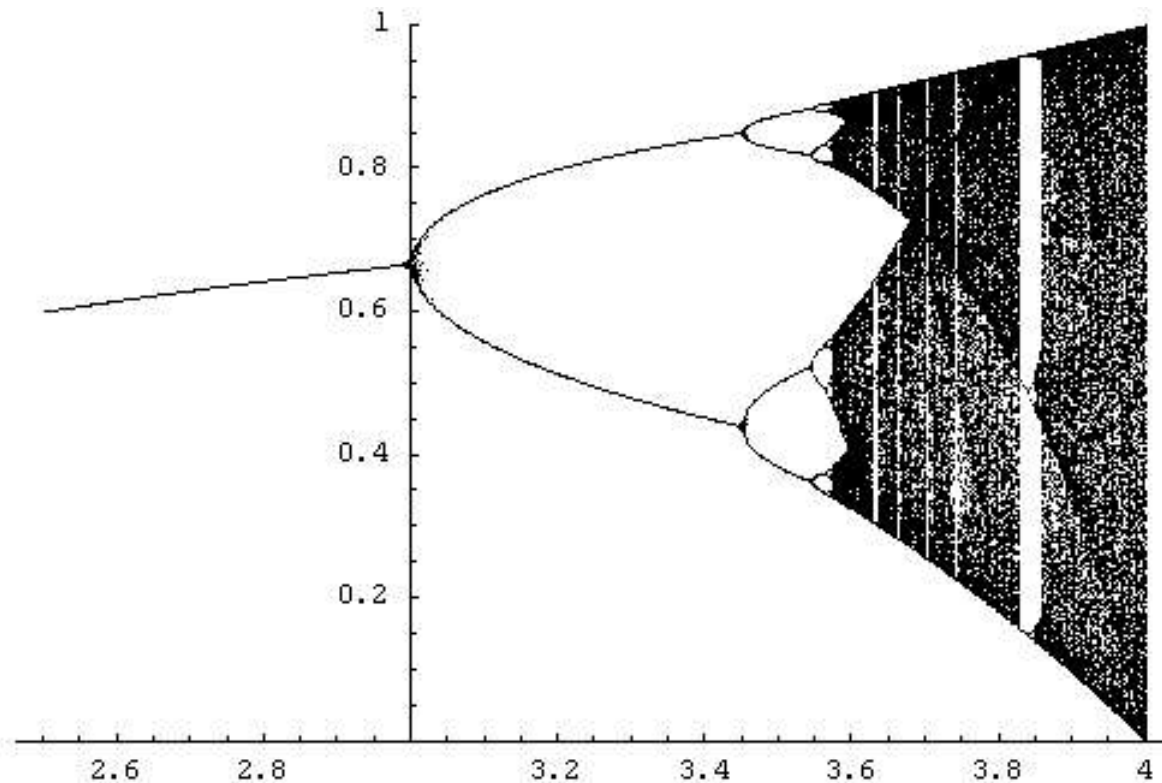


- W obszarze chaotycznym ($r = 3.7$)



Wykres bifurkacyjny

- Dla mapy logistycznej



Chaos deterministyczny

- Czująca zależność od warunków początkowych:
Rysunek pokazuje różnicę między historią dwóch populacji różniących się początkowo o 0.0000001

