

MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 5892 424

<http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/>

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula
Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002



Układ dynamiczny

- *Układ*: zbiór obiektów, których zmiany w czasie chcemy badać
- *Dynamiczny*: zmieniający się w czasie zgodnie z pewną regułą

Typy układów dynamicznych

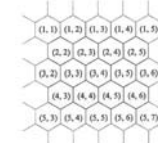
- Układy deterministyczne
 - Układy autonomiczne
 - Układy zależne od czasu
- Układy losowe (stochastyczne)

Przykład 1: Wyborcy

- *Stan układu*: Preferencje wyborcze grupy respondentów
- *Ewolucja*: Zmiany preferencji następują na skutek kontaktów międzyludzkich

Przykład 2: Płatek śniegu

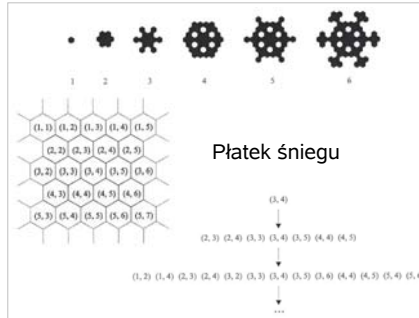
- Automat komórkowy na sieci o strukturze plastra miodu
- Ten sam stan początkowy zawsze daje ten sam stan końcowy (układ deterministyczny)



Płatek śniegu



Reguła: Nowy fragment powstaje w komórce sieci, która ma dokładnie jednego zmarzniętego sąsiada



Ewolucja układu dynamicznego

- Rozwój w czasie układu dynamicznego opisuje równanie ewolucji w postaci wzoru iteracyjnego

$$X_{n+1} = F_p(X_n)$$



- X_n i X_{n+1} opisują stan układu w chwili n i $n+1$
- F_p określa jakim zmianom ulega stan układu w kolejnych krokach iteracji

Przykład 3: algorytm Newtona

- Jak policzyć pierwiastek z a ?
- Należy wybrać dowolną liczbę i iterować ją zgodnie z regułą

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

- Dlaczego? Jeżeli $x < \sqrt{a}$ to $\frac{a}{x} > \sqrt{a}$, a więc $\frac{x + \frac{a}{x}}{2} > \sqrt{a}$ i na odwrót.

Przykład 3: pierwiastek z 2

- Weźmy $x_0 = 2$
- Wtedy
 - $x_1 = 1,5$
 - $x_2 = 1,416$
 - $x_3 = 1,414215$
 - $x_4 = 1,414213562374$
 - $x_5 = 1,414213562373095048801689$
 - ...
- I tak dalej

Kilka pojęć

- Punkt stały:** stan układu, który się nie zmienia z czasem
- Atraktor:** stan, do którego układ dąży z czasem
- Dorzecze (basen) atraktora:** zbiór stanów początkowych, które dążą do danego atraktora

Przykład basenów atraktora

- Rozważmy odwzorowanie płaszczyzny

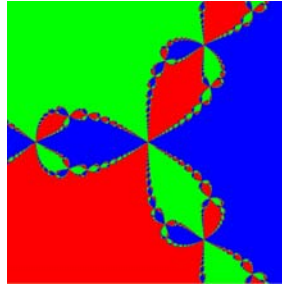
$$x_{t+1} = \frac{2}{3}x_t + \frac{1}{3} \frac{x_t^2 - y_t^2}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$

$$y_{t+1} = \frac{2}{3}y_t - \frac{1}{3} \frac{2x_t y_t}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$

- To odwzorowanie ma trzy atraktory:

$$(1,0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Baseny
pierwiastków
jedynki



Model Ehrenfesta: psy i pchły

- N pcheł siedzi na dwóch psach: na Azorze A_n , a na Burku B_n
- Co chwilę jedna z pcheł podejmuje decyzję o przeskoku z jednego psa na drugiego
- Jak zmienia się rozkład pcheł?
 $A_{n+1} = A_n - 1$ z prawdopodobieństwem A_n/N
 $A_{n+1} = A_n + 1$ z prawdopodobieństwem $(N-A_n)/N$

Determinizm a losowość

- Większość procesów w przyrodzie ma składowe deterministyczną i losową
- Jeżeli „szum” jest nieduży, modelujemy układ jako ściśle deterministyczny
- Jeżeli „szum” jest dominujący, modelujemy układ jako proces stochastyczny

W ogólności

- Jesteśmy bez szans...

Chaos deterministyczny

- Proste iteracje odwzorowań:
 - Funkcja liniowa
 - Funkcja logistyczna
- Układy z ciągłym czasem
- Wpływ topologii na ewolucję

Przykład: funkcja liniowa

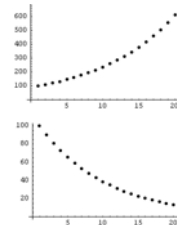
- Rozważmy populację much. Oznaczmy liczbę much w roku n -tym przez x_n . Załóżmy, że na każdą muchę w pokoleniu n średnio przypada R much w pokoleniu następnym. Wtedy ewolucja much jest dana przez:

$$x_{n+1} = R x_n$$

$$x_n = R^n x_0$$

Przykład: funkcja liniowa

- Stąły wzrost ($R > 1$)
- Stąły rozpad ($R < 1$)



Przykład: funkcja logistyczna

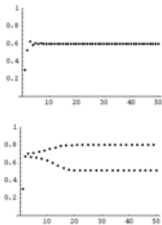
Model liniowy jest zbyt dużym uproszczeniem. Wzrost populacji zwykle ograniczony jest przez czynniki zewnętrzne: drapieżców, ograniczone zasoby, itp. Biorąc pod uwagę skończoną ilość dostępnego pożywienia dostajemy model zwany logistycznym. Jeżeli wzrost R jest pomniejszony o wielkość proporcjonalną do x_n to dostajemy:

$$x_{n+1} = (R - a x_n) x_n$$

$$y_{n+1} = r(1 - y_n) y_n$$

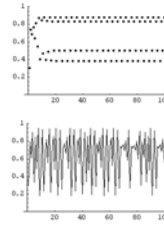
Szereg czasowy

- W obszarze regularnym ($r = 2.5$)
- W obszarze regularnym ($r = 3.2$)



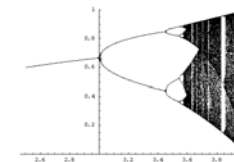
Szereg czasowy

- W obszarze regularnym ($r = 3.5$)
- W obszarze chaotycznym ($r = 3.7$)



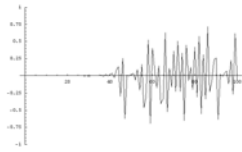
Wykres bifurkacyjny

- Dla mapy logistycznej



Chaos deterministyczny

- Czula zależność od warunków początkowych: Rysunek pokazuje różnicę między historią dwóch populacji różniących się początkowo o 0.0000001



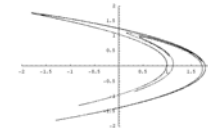
Iteracje płaszczyzny

- Przykład dwuwymiarowy: mapa Henona

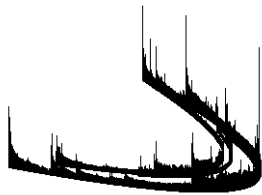
$$x_{n+1} = A - x_n^2 + B y_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$

Dziwny atraktor

Dla pewnych wartości parametrów A i B , mapa Henona dąży do atraktora, który jest fraktalem. Taki atraktor nazywamy **dziwnym**.



Prawdopodobieństwo odwiedzin obszarów na atraktorze



Typowe atraktory

- Punkty stałe
- Cykle okresowe
- Dziwne atraktory (fraktale)

Układy z ciągłym czasem

- Większość interesujących układów zmienia się w czasie w sposób ciągły. Modelujemy to za pomocą **równań różniczkowych**. Równania te określają szybkość zmian parametrów układu w funkcji tych parametrów. Na przykład szybkość zmian położenia joja jest funkcją jego prędkości, położenia, oraz przyłożonej siły (ruch ręką).
- Aby w układach z ciągłym czasem pojawił się chaos, potrzebne są co najmniej 3 zmienne.

Przykład: równania Lorentza

- Uproszczony model konwekcji w atmosferze:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + 10(y_n - x_n)\epsilon \\ y_{n+1} &= y_n + (28x_n - y_n - x_n z_n)\epsilon \\ z_{n+1} &= z_n + \left(-\frac{8}{3}z_n + x_n y_n\right)\epsilon\end{aligned}$$

- ϵ to mała liczba określająca precyzję czasową zmian stanu układu

Samopodobieństwo

- Figura jest samopodobna, jeżeli można ją podzielić na części podobne do całości
- Przykłady:
 - Trójkąt
 - Kwadrat
 - Odcinek

Fraktale

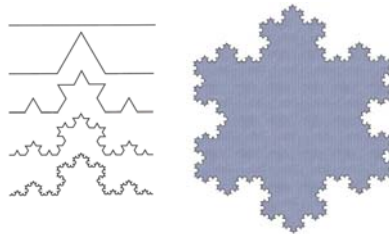
- *Fraktal*: zbiór samopodobny o „niecałkowitym wymiarze”
- Przykłady fraktali to:
 - Zbiór Cantora
 - Krzywa Kocha
 - Trójkąt Sierpińskiego

Przykład: zbiór Cantora

- Wycinamy środkową jedną trzecią danego odcinka
- Stosujemy tę procedurę do każdej otrzymanej części
- Po (nieskończenie) wielu powtórzeniach otrzymamy zbiór Cantora



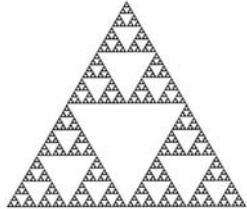
Przykład: krzywa i płatek Kocha



Przykład: trójkąt Sierpińskiego

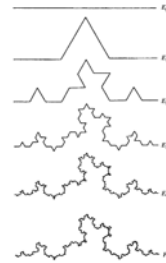
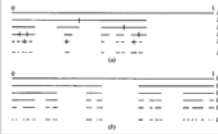
- Metoda 1: wycinamy coraz to mniejsze trójkąty ze zbioru początkowego
- Metoda 2: używamy dostępnej struktury w kroku N do konstrukcji kroku N+1 po czym skalujemy

Trójkąt Sierpińskiego



Fraktale losowe

- Losowe zbiory Cantora
- Losowe trójkąty Sierpińskiego
- Większość fraktali spotykanych w przyrodzie

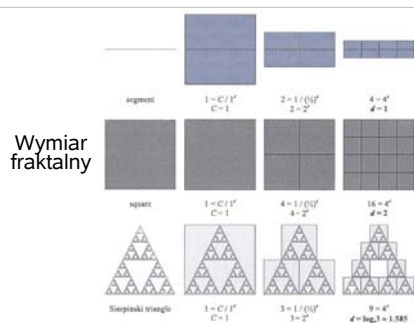


Wymiar fraktalny

- Opisuje skalowanie masy układu przy zmianie skali długości
- Wymiar prostych zbiorów zero-, jedno- i dwuwymiarowych
- Porównanie z fraktalami

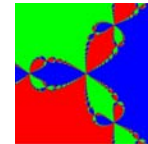
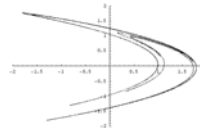
$$N(\epsilon) \approx C \epsilon^{-D}$$

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$



Fraktale a układy dynamiczne

- Zbiory niezmiennicze (atraktory, np. atraktor Henona, atraktor Lorenza)
- Granice zbiorów przyciągania (np. brzegi basenów pierwiastków jedynki dla metody Newtona)



Konstrukcja zbioru Mandelbrota

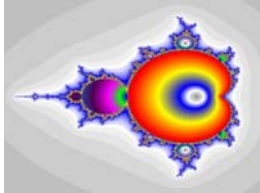
- Rozważmy odwzorowanie

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + x_0$$

$$y_{n+1} = 2 x_n y_n + y_0$$

- Kolejne iteracje (punkty)
 - Albo rosną nieograniczenie („uciekają do nieskończoności”),
 - Albo nie wychodzą poza koło o środku w (0,0) i promieniu 2.
- Zbiór punktów drugiego typu to **żuk Mandelbrota**

Żuk Mandelbrota



Literatura

- „Czy Bóg gra w kości” Ian Stewart
- „Chaos” James Gleick
- „Granice chaosu. Fraktale” Peitgen, Jürgens, Saupe
- „Fraktale” Piotr Pierański
- „Wstęp do dynamiki układów chaotycznych” Baker, Gollub
- „Chaos w układach dynamicznych” Ed Ott
- „Understanding nonlinear dynamics” Kaplan, Glass

Użyte programy

- Feigenbaum
- Lorenz
- Sierpinski
- Mandelbrot

Źródła

- <http://www.wiw.pl/modelowanie/>