MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 022 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula

Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

wkrótce drugie wydanie, rozszerzone

Program wykładu I

1) **Wstęp:** Ogólne uwagi o modelach i o modelowaniu
2) **Gra w życie ("The Game of Life"):** Automaty komórkowe
3) **Orzeł czy reszka? Prawdopodobieństwo zdarzenia:** Własności prawdopobieństwa i jego znaczenie w modelowaniu
4) **Deska Galtona - prawdopodobieństwo a statystyka:** Jak z przypadkowych zdarzeń wynikają ogólne prawidłowości

Program wykładu II

5) **Gra w dwadzieścia pytań - prawdopodobieństwo i informacja**: Elementarne wprowadzenie pojęcia informacji i sposobów jej mierzenia
6) **Jak powstaje płatek śniegu - ewolucja układów dynamicznych**: Opis ewolucji układu "krok po kroku"
7) **Motyl Lorenza - chaos deterministyczny**: Efekt motyla w obliczeniach i w przyrodzie

Program wykładu III

8) **Od Cantora do Mandelbrota. Samopodobieństwo i fraktale:** O tym jak prosty przepis może być źródłem nieskończonej złożoności.
9) **Dylemat więźnia - teoria gier**: Podstawowe pojęcia teorii gier i omówienie niektórych metod poszukiwania najlepszych strategii
10) **Mosty Królewca - teoria grafów**: O tym, jak rysunki pomagają w rozumowaniu.

Program wykładu IV

11) **Algorytmy genetyczne - ewolucja w komputerze**: Zastosowania procesów ewolucji do modelowania
12) **Mózg jako komputer. Sieci neuronowe**: O tym, jak komputer uczy się
13) **Sztuczna inteligencja:** Systemy eksperckie, rozmyta logika a świadomość
14) **Kto wygra wybory? Modelowanie społeczeństwa**: Analiza przypadkowego społeczeństwa

Modele

- Cel nauki?
  opisać, zrozumieć i przewidzieć rzeczywistość

- Co to jest model?

  Zbiór elementów rzeczywistości, przyjętych jako istotne dla danego zagadnienia, oraz reguł, które nim rządzą

- Przykłady modeli

- Do czego są nam potrzebne modele?

Modelowanie

- Na czym polega modelowanie:
  - wybór modelu
  - tworzenie algorytmu
  - wnioski
- Skuteczność modelowania

Model czy teoria

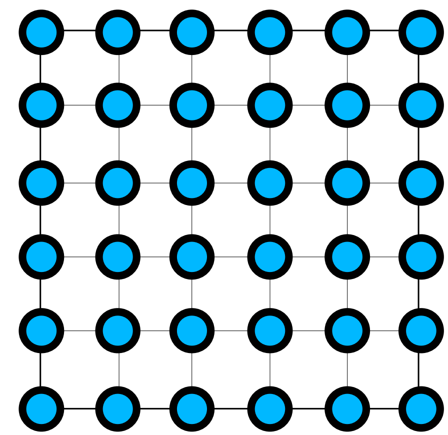
- Tworząc teorię staramy się uwzględnić wszystkie znane czynniki wpływające na dane zjawisko
- Tworząc model rozmyślnie pomijamy niektóre czynniki, żeby uzyskać prostszy schemat

Automaty komórkowe

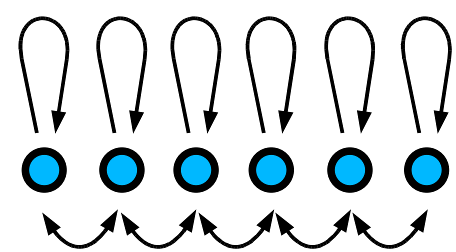
- identyczne elementy
- ułożone na regularnej sieci
- zmieniają stan synchronicznie
- zgodnie z identyczną regułą

Geometria jedno- i dwuwymiarowych automatów komórkowych

Geometria dwuwymiarowego automatu komórkowego w którym każda komórka ma 4 sąsiadów



Geometria jednowymiarowego automatu komórkowego w którym każda komórka ma 2 sąsiadów



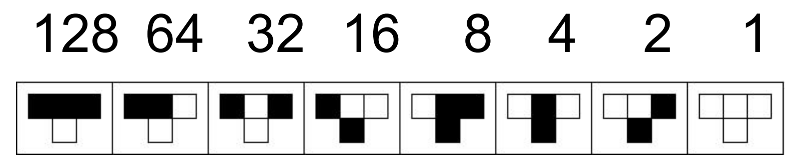
warunki brzegowe!

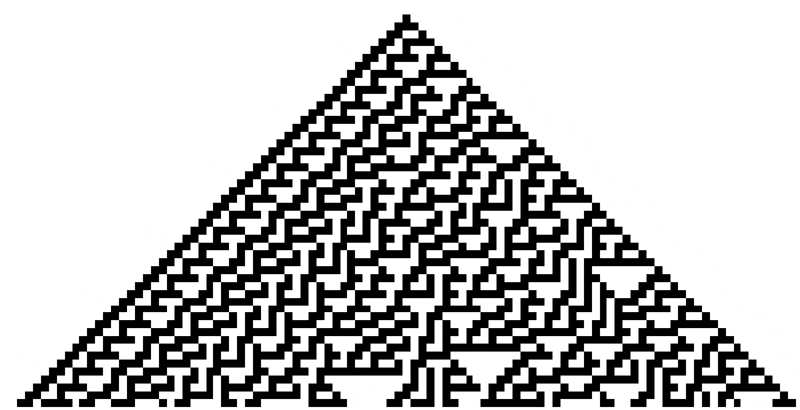
Jednowymiarowe automaty komórkowe

Jak zdefiniować automat komórkowy?

Dla każdego stanu komórki n i jej sąsiadów $n+1$ i $n-1$ w chwili t trzeba określić stan komórki n w chwili $t+1$

reguła 30





Jak to działa?

- rozważmy układ 10 komórek
- zacznijmy od stanu 0100000000
- reguła przejścia: stan komórki w chwili *t+1* równy jest sumie stanów komórki i jej sąsiada z lewej z chwili *t*
- wówczas ewolucja wygląda tak:

- 0100000000
- 0110000000
- 0121000000
- 0133100000
- 0146410000
- ...

wartości występujące w n-tym kroku tej ewolucji dane są przez współczynniki występujące w rozwinięciu dwumianu (a+b)^n

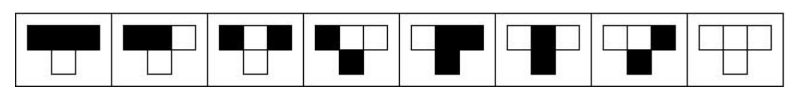
Kodowanie reguły

Każdemu układowi stanów komórki *n* i jej sąsiadów *n+1* i *n-1* w chwili *t* przypisujemy liczbę jak na rysunku obok

Kodem reguły jest suma liczb kodujących te trójki stanów, po których w chwili *t+1* stan komórki *n* ma być 1

reguła 30

128 64 32 16 8 4 2 1

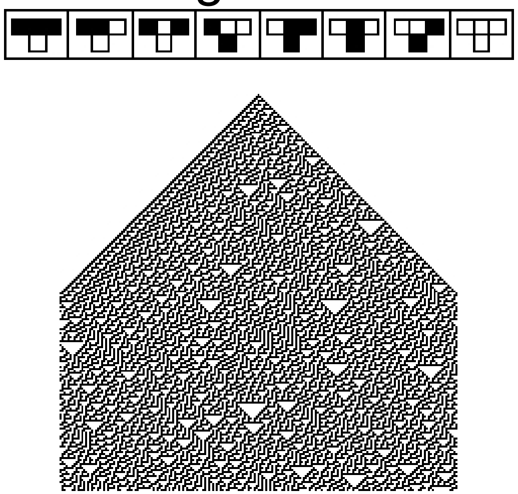


0 0 0 1 1 1 1 0

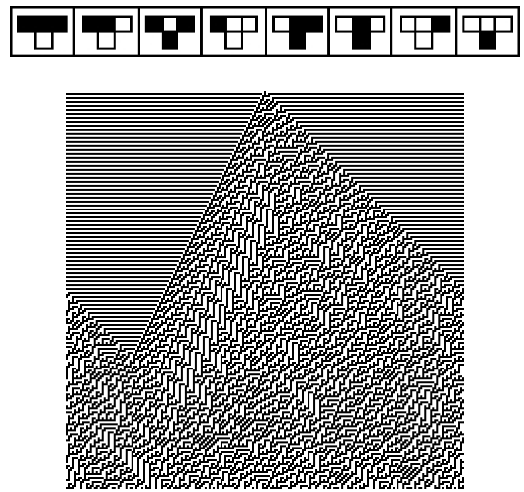
kod reguły = 16+8+4+2 = 30

Przykłady innych reguł

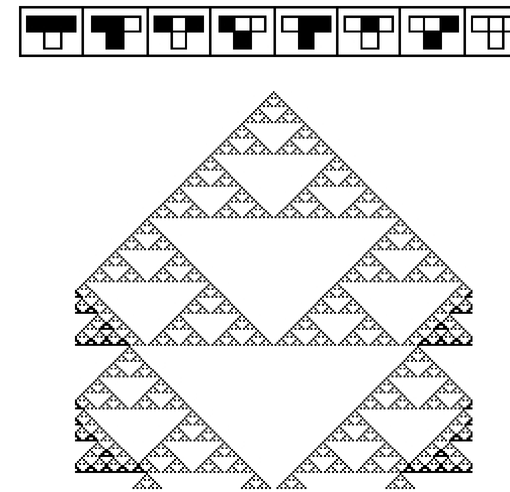
reguła 30



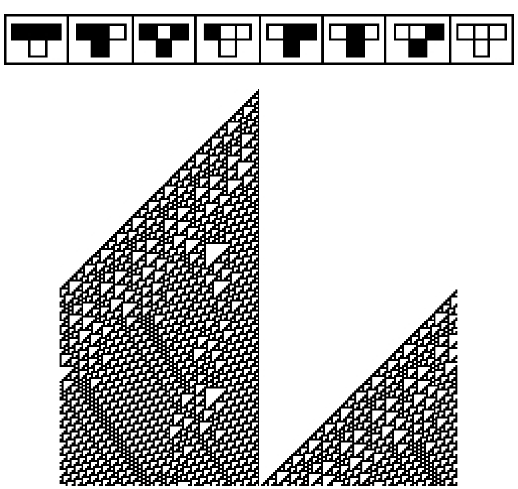
reguła 45



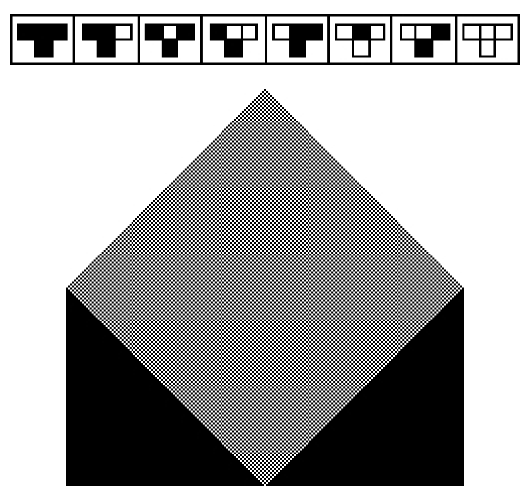
reguła 90



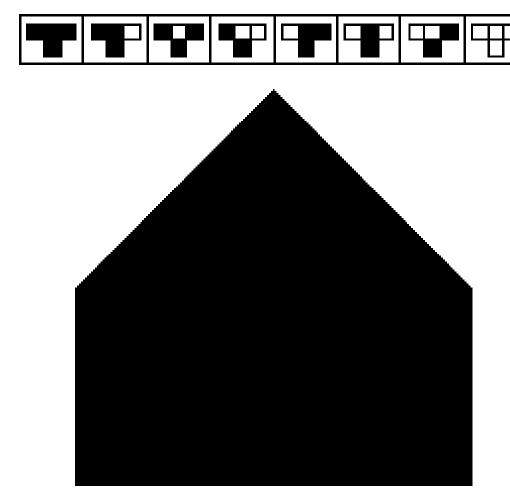
reguła 110



reguła 250



reguła 254



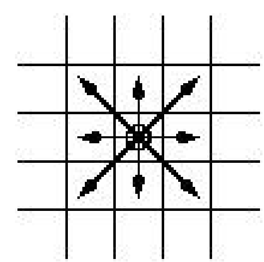
Gra w życie: historia

- Wymyślił ją John Conway pod koniec lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku
- Rozpropagował Martin Gardner w latach siedemdziesiątych w “Scientific American”
- Program **Conway**

Gra w życie: reguły

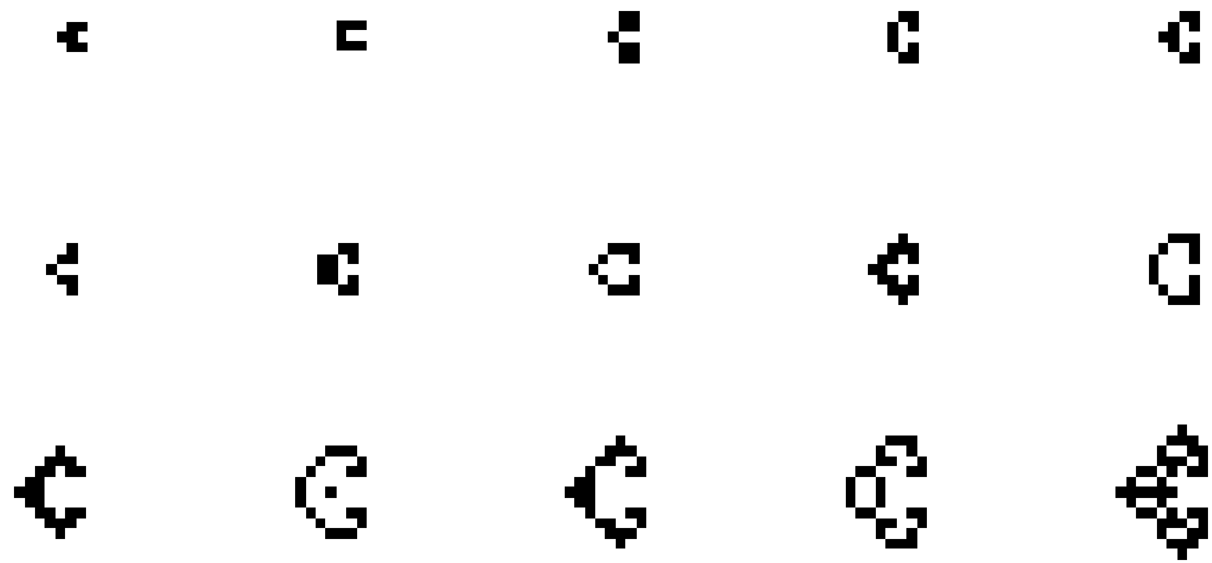
- Żywa komórka, mająca jednego żywego sąsiada lub mniej, umiera z osamotnienia
- Żywa komórka, mająca dwóch lub trzech żywych sąsiadów, jest szczęśliwa i żyje dalej
- Żywa komórka, mająca więcej niż trzech żywych sąsiadów, umiera z zatłoczenia
- Martwa komórka, mająca dokładnie trzech żywych sąsiadów, ożywa

Ośmiu najbliższych sąsiadów
danej komórki

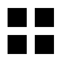
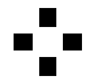
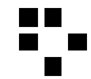
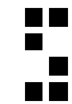
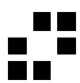
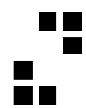
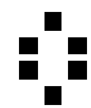
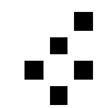
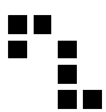
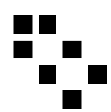
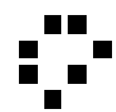
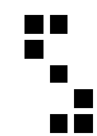


Gra w życie: przykłady

Ewolucja przykładowego stanu 6-komórkowego



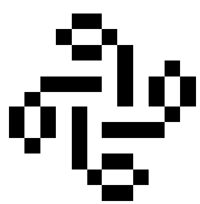
Gra w życie – martwa natura (still life)

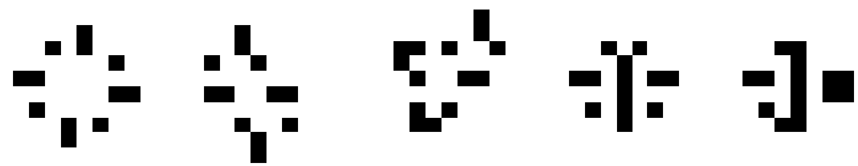
box		tub		boat		snake	
ship		aircraft carrier		beehive		barge	
eater/ fishhook		long boat		loaf		long snake	

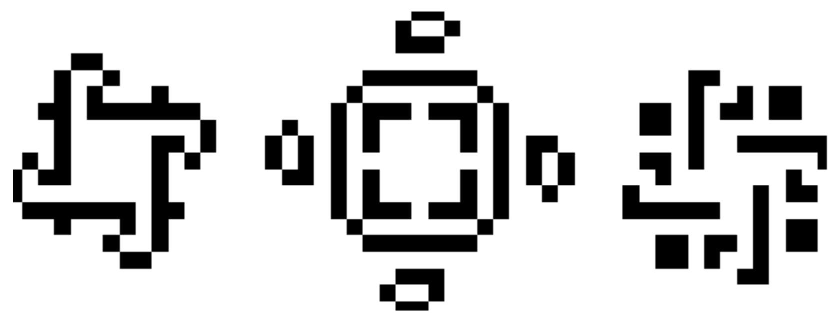
martwa natura (still life) – grupy komórek, które nie zmieniają się w czasie

Gra w życie – oscylatory

- Oscylatory, to konfiguracje, które powtarzają się po pewnej liczbie generacji

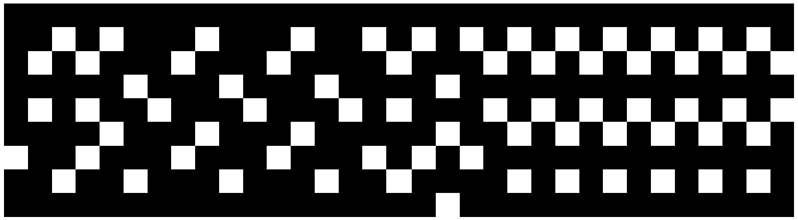


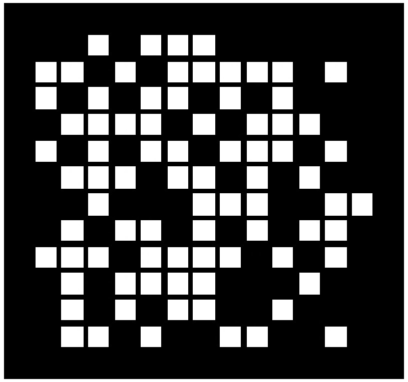




Gra w życie – rajskie ogrody

- Konfiguracja poprzedzająca daną nazywa się „rodzicem”
- Konfiguracje nie mające rodziców nazywają się „rajskimi ogrodami”





Rozbudowane modele

- Komórka może mieć więcej stanów:
  - kilka stanów (dyskretne), np. modele infekcji, epidemii, pożarów lasu, ośrodków pobudliwych
  - stany ciągłe, np. modele dyfuzji

Wyimaginowany model infekcji

- rozważmy automat komórkowy o trzech możliwych stanach: zdrowy, chory, odporny
- komórka zdrowa może zachorować, jeżeli przynajmniej jeden z jej sąsiadów jest chory
- po 6 krokach komórka chora staje się odporna na 4 kroki czasowe. W tym czasie nie zaraża i sama nie może być zarażona
- po 4 krokach komórka odporna staje się znowu zdrowa

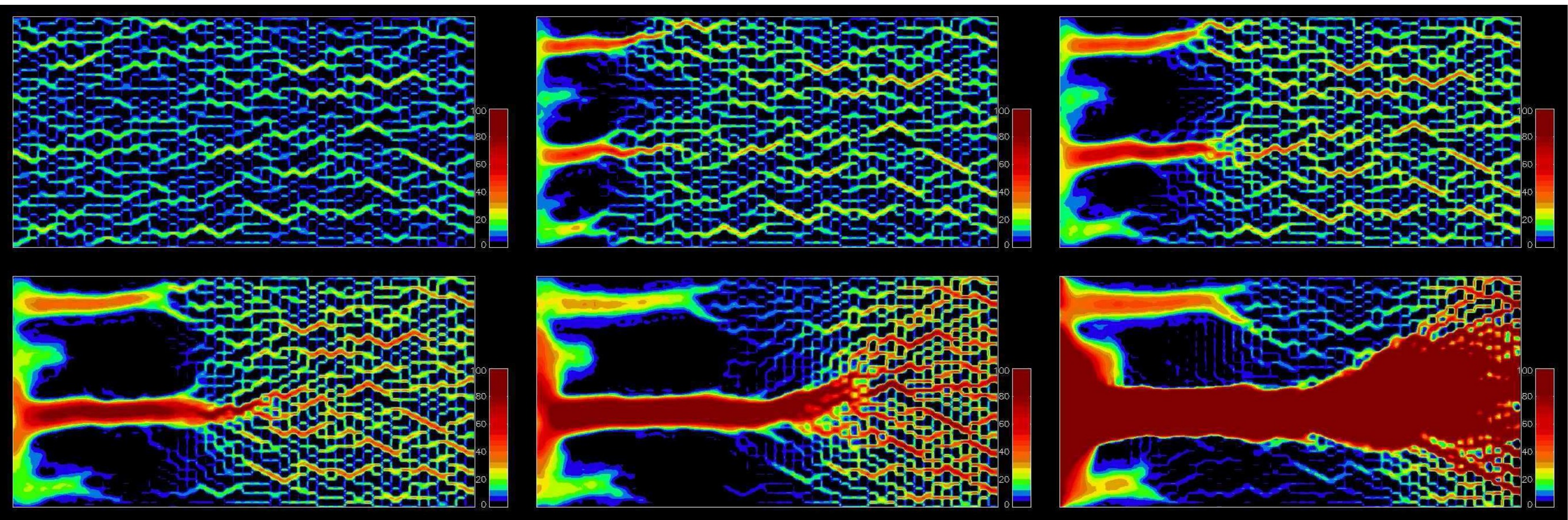
Model dyfuzji

- Automaty mogą mieć nie tylko dyskretne stany, ale i ciągłe. Przykład:
- jednowymiarowy automat komórkowy. Stan komórki m jest dany stężeniem substancji w danym punkcie w czasie t
- Reguła przejścia dana jest wzorem:

$$c_{t+1}[m] = D\left(c_t[m+1] + c_t(m-1)\right) + (1-2\mathrm{D})\, c_t[m]$$

Inne automaty komórkowe

- gazy sieciowe
- kupki piasku (SOC – self organized criticality)
- **przepływ przez materiały porowate**
- korki w ruchu ulicznym
- pożary lasu
- modele społeczeństwa



Deterministyczne czy losowe?

- Układ deterministyczny to taki, którego przyszły stan jest jednoznacznie określony przez stan obecny.
- Układ losowy to taki, który nie jest deterministyczny.
- UWAGA: jeżeli układ jest losowy, to nie znaczy, że nie rządzą nim żadne prawa, lub że nic nie potrafimy powiedzieć o jego przyszłym stanie!

Rzut monetą

Załóżmy, że moneta jest symetryczna. Wtedy prawdopodobieństwo wyrzucenia orła p_o i reszki p_r jest takie samo.

Przyjęto umowę, że suma prawdopodobieństw wynosi 1. Zatem

$$p_o=p_r=1/2$$

Co to jest prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo:
liczba z przedziału od 0 do 1, przyporządkowana zdarzeniu przypadkowemu.

Liczba ta jest miarą szansy na to, że dane zdarzenie zajdzie.

Jak ustalić prawdopodobieństwo?

- na podstawie rozważań o symetrii
- na podstawie doświadczeń

definicja częstotliwościowa von Misesa:
prawdopodobieństwo p_A zajścia zdarzenia A określamy jako granicę

$$p_A = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

N_A – liczba zdarzeń A podczas przeprowadzenia N prób

Symetryczne rozkłady prawdopodobieństwa

- rzut monetą
- rzut kostką
- wyciągnięcie karty z potasowanej talii

Weryfikacja doświadczalna teorii

- Doświadczenia Buffona
  - 4040 rzutów
  - 2048 razy reszka, 1992 orzełek
  - $p_r = 0.5069$
- Doświadczenia Romanowskiego
  - 80640 rzutów
  - $p_r = 0.4923$
- Program **Buffon**

Chłopcy i dziewczęta

- W badaniach demograficznych stwierdzono, że stosunek liczby urodzeń chłopców do wszystkich urodzeń jest liczbą stałą i wynosi około $22/43 \approx 0{,}5116$
- Kiedy Laplace odkrył, że w Paryżu w latach 1745-1784 liczba ta spadła do $25/49 \approx 0{,}5102$ uznał, że coś nadzwyczajnego musiało się wydarzyć.
- Okazało się, że ubodzy mieszkańcy okolic Paryża chętniej podrzucali do stolicy dziewczęta niż chłopców

Definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

- Prawdopodobieństwo P(A) jest równe stosunkowi liczby przypadków sprzyjających wystąpieniu zdarzenia A do wszystkich możliwych przypadków
- Jak na podstawie genetyki otrzymać stosunek liczby urodzeń chłopców do liczby wszystkich urodzeń?

Rzut dwoma kostkami

- Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek?

Rozwinięcia liczb niewymiernych

- rozwinięcia liczb wymiernych
- rozwinięcia dziesiętne liczb e, pi, sqrt(2)
- rozwinięcia dwójkowe liczb e, pi, sqrt(2)
- prawdopodobieństwa wystąpienia cyfr
- prawdopodobieństwa wystąpienia par cyfr
- Program **Poe** i rozwinięcia liczb

Metoda Monte Carlo

- Metoda Monte Carlo polega na wykonaniu wielu eksperymentów losowych w celu oszacowania wyniku.

- Program **Ulam:**
  pole prostokąta: funkcja stała
  pole trójkąta: x
  pole koła i liczba π: sqrt(1-x^2)

Definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

- Prawdopodobieństwo P(A) jest równe stosunkowi liczby przypadków sprzyjających wystąpieniu zdarzenia A do wszystkich możliwych przypadków

- Jak na podstawie genetyki otrzymać stosunek liczby urodzeń chłopców do liczby wszystkich urodzeń?