MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 022 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula

Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

wkrótce drugie wydanie, rozszerzone

Deterministyczne czy losowe?

- Układ deterministyczny to taki, którego przyszły stan jest jednoznacznie określony przez stan obecny.
- Układ losowy to taki, który nie jest deterministyczny.
- UWAGA: jeżeli układ jest losowy, to nie znaczy, że nie rządzą nim żadne prawa, lub że nic nie potrafimy powiedzieć o jego przyszłym stanie!

Rzut monetą

Załóżmy, że moneta jest symetryczna. Wtedy prawdopodobieństwo wyrzucenia orła p_o i reszki p_r jest takie samo.

Przyjęto umowę, że suma prawdopodobieństw wynosi 1. Zatem

$$p_o = p_r = 1/2$$

Co to jest prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo:
liczba z przedziału od 0 do 1, przyporządkowana zdarzeniu przypadkowemu.

Liczba ta jest miarą szansy na to, że dane zdarzenie zajdzie.

Jak ustalić prawdopodobieństwo?

- na podstawie rozważań o symetrii
- na podstawie doświadczeń

definicja częstotliwościowa von Misesa:
prawdopodobieństwo p_A zajścia zdarzenia A określamy jako granicę

$$p_A = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

N_A – liczba zdarzeń A podczas przeprowadzenia N prób

Symetryczne rozkłady prawdopodobieństwa

- rzut monetą
- rzut kostką
- wyciągnięcie karty z potasowanej talii

Weryfikacja doświadczalna teorii

- Doświadczenia Buffona
  - 4040 rzutów
  - 2048 razy reszka, 1992 orzełek
  - $p_r = 0.5069$
- Doświadczenia Romanowskiego
  - 80640 rzutów
  - $p_r = 0.4923$
- Program **Buffon**

Chłopcy i dziewczęta

- W badaniach demograficznych stwierdzono, że stosunek liczby urodzeń chłopców do wszystkich urodzeń jest liczbą stałą i wynosi około $22/43 \approx 0{,}5116$
- Kiedy Laplace odkrył, że w Paryżu w latach 1745-1784 liczba ta spadła do $25/49 \approx 0{,}5102$ uznał, że coś nadzwyczajnego musiało się wydarzyć.
- Okazało się, że ubodzy mieszkańcy okolic Paryża chętniej podrzucali do stolicy dziewczęta niż chłopców

Definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

- Prawdopodobieństwo P(A) jest równe stosunkowi liczby przypadków sprzyjających wystąpieniu zdarzenia A do wszystkich możliwych przypadków
- Jak na podstawie genetyki otrzymać stosunek liczby urodzeń chłopców do liczby wszystkich urodzeń?

Rzut dwoma kostkami

- Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek?

Definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

- Prawdopodobieństwo P(A) jest równe stosunkowi liczby przypadków sprzyjających wystąpieniu zdarzenia A do wszystkich możliwych przypadków

- Jak na podstawie genetyki otrzymać stosunek liczby urodzeń chłopców do liczby wszystkich urodzeń?

Statystyczne własności liczb rzeczywistych

Wybierzmy dowolną liczbę rzeczywistą.

Co można powiedzieć o rozkładzie cyfr
w zapisie dziesiętnym (dwójkowym, innym)
tej liczby?

Przykład: liczby wymierne

$1/5 = 0.2_{10} = 0.001100110011\ldots_2$

$1/7 = 0.142857142857\ldots_{10} = 0.001001\ldots_2$

Statystyczne własności liczb rzeczywistych

- **Przykład**: liczby niewymierne
  - 0.121121112111121111121111112...
  - e = 2,7182818284590452353602874713527...
  - π = 3,1415926535897932384626433832795...
  - $\sqrt{2}$ = 1,4142135623730950488016887242097...

- prawdopodobieństwa wystąpienia cyfr
- prawdopodobieństwa wystąpienia par cyfr
- Program **Poe** i rozwinięcia liczb

Statystyczne własności liczb rzeczywistych

- **Przykład**: Binarna reprezentacja liczby

  π = 3,141592653589793238462643383...

  jest początkowo zdominowana przez zera:
  125 zer w pierwszych 204 znakach!

  To daje odchylenie prawie 23%
  od wartości średniej.

  Dopiero po 26 596 znakach
  liczby zer i jedynek zrównują się!

Nieskończona liczba przypadków

- Jakie jest prawdopodobieństwo zastania na stacji stojącego pociągu, jeżeli wiemy, że pociągi wjeżdżają na stację co 10 minut i stoją na niej minutę?

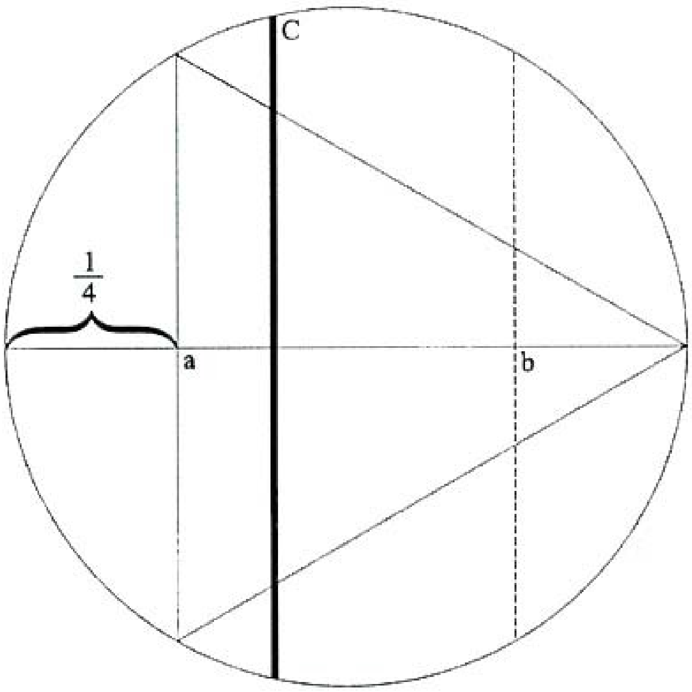
- Paradoks Bertranda:

  jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na chybił trafił wybrana cięciwa koła będzie dłuższa od ramienia trójkąta równobocznego wpisanego w to koło?

- Program **Bertrand**

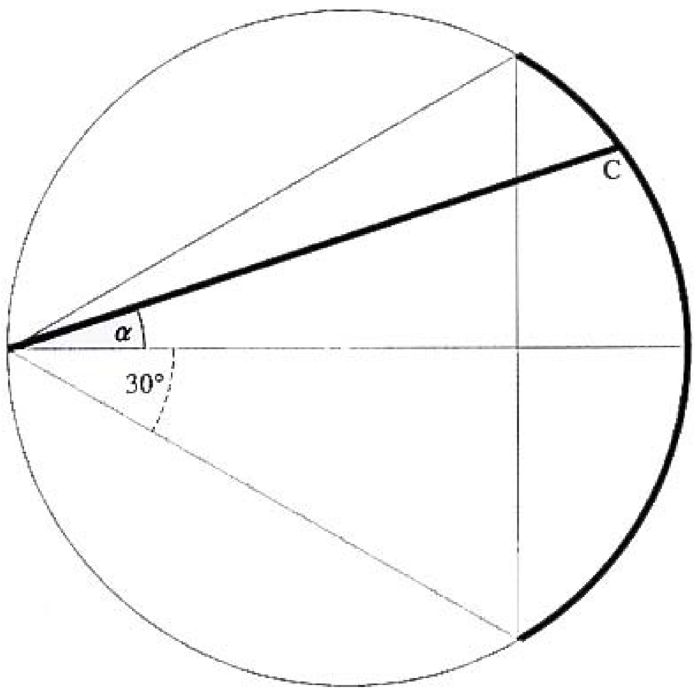
Paradoks Bertranda – rozwiązanie 1

Ustalmy kierunek cięciwy, np. pionowy. Przesuwając cięciwę od lewa do prawa widzimy, że tylko pomiędzy punktami *a* i *b* długość cięciwy jest większa od połowy średnicy. Długość *ab* jest równa połowie średnicy, zatem prawdopodobieństwo jest 1/2.



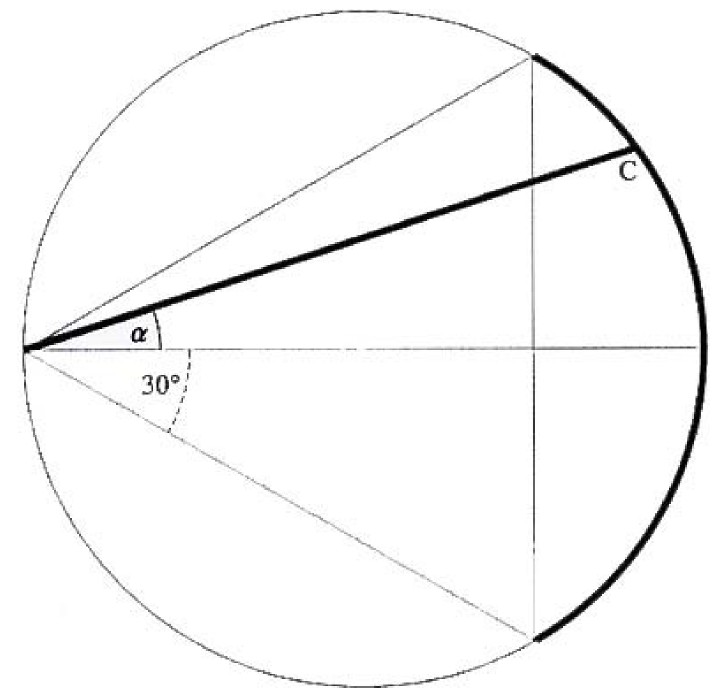
Paradoks Bertranda – rozwiązanie 2

Rozważmy cięciwę zaczepioną w jednym punkcie. Zmieniając jej kąt nachylenia względem średnicy od -90 do +90 stopni dostajemy wszystkie możliwe cięciwy. Te z nich, które ze średnicą tworzą kąt od -30 do +30 stopni są dłuższe od połowy średnicy. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi 60/180 = 1/3.



Paradoks Bertranda – rozwiązanie 3

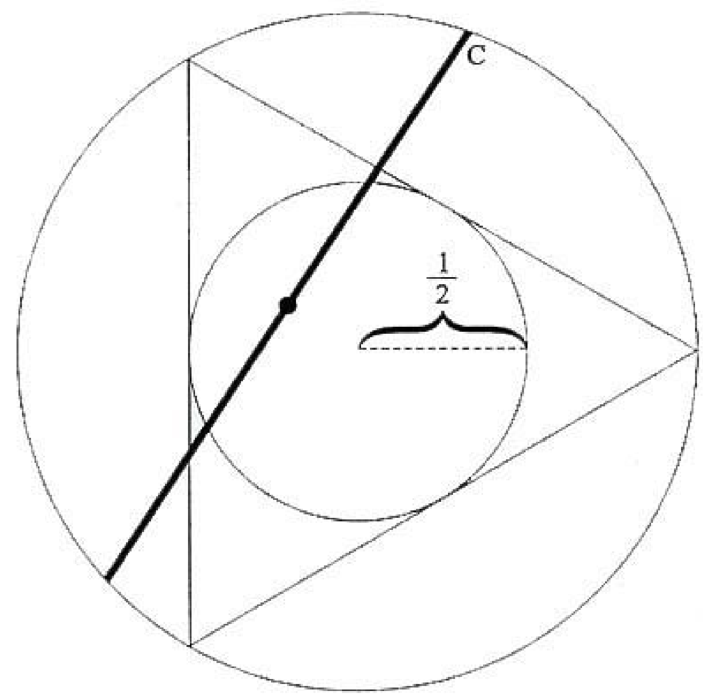
Wybierzmy losowo
dwa punkty na okręgu
łącząc je cięciwą.
Pierwszy punkt jest dowolny,
drugi musi leżeć
na jednej trzeciej okręgu
naprzeciwko pierwszego punktu,
żeby cięciwa była
odpowiednio długa.



Zatem prawdopodobieństwo
wynosi również 1/3.

Paradoks Bertranda – rozwiązanie 4

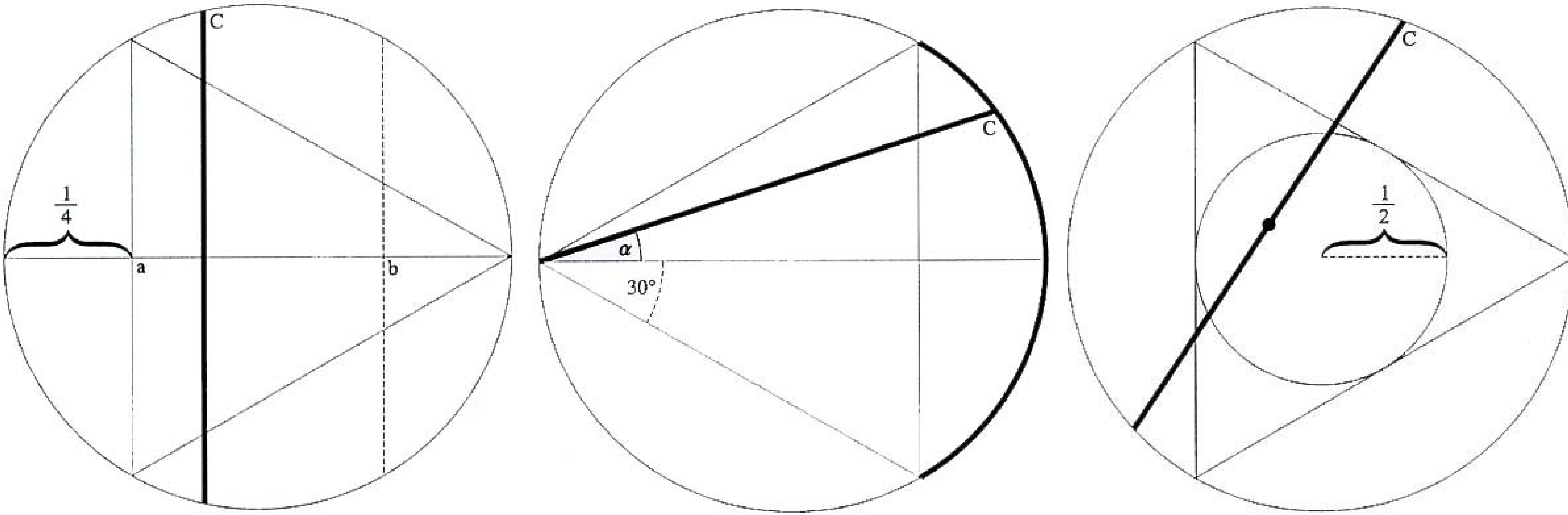
Środek każdej cięciwy leży wewnątrz koła i wyznacza jednoznacznie jej położenie.



Ta część koła, w której leżą środki cięciw spełniających zadany warunek, jest również kołem o promieniu równym połowie długości promienia dużego koła.

Stosunek pola tej części, do pola całego koła wynosi 1/4.

Paradoks Bertranda – podsumowanie



Które rozwiązanie jest poprawne?

Metoda Monte Carlo

- Metoda Monte Carlo
  polega na wykonaniu
  wielu eksperymentów losowych
  w celu oszacowania wyniku.

- Program **Ulam:**

  pole prostokąta: funkcja stała
  pole trójkąta: x
  pole koła i liczba π: $\sqrt{}(1-x^2)$