# MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 022 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

# Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula

Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

wkrótce drugie wydanie, rozszerzone

# Ciągi liczb losowych

- Czy ciąg 0,1,0,1,0,1,... jest losowy?
- Napisz na kartce ciąg zer i jedynek o długości 100 znaków
- Policz ile jest w tym ciągu podciągów złożonych z trzech, czterech i pięciu jedynek
- Porównaj z wynikami wygenerowanymi przez program **Bernoulli**

# Prawdopodobieństwo wylosowania ciągów samych jedynek

- Aby uzyskać samotną jedynkę w binarnym ciągu trzeba wyrzucić po kolei 0,1,0 – prawdopodobieństwo ½ * ½ * ½ = 1/8
- Aby uzyskać n jedynek w binarnym ciągu trzeba wyrzucić po kolei 0,1, ... ,1,0 – to daje prawdopodobieństwo

$$\frac{1}{2} * \underbrace{\frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{2}}_{n\ razy} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}^{(n+2)}$$

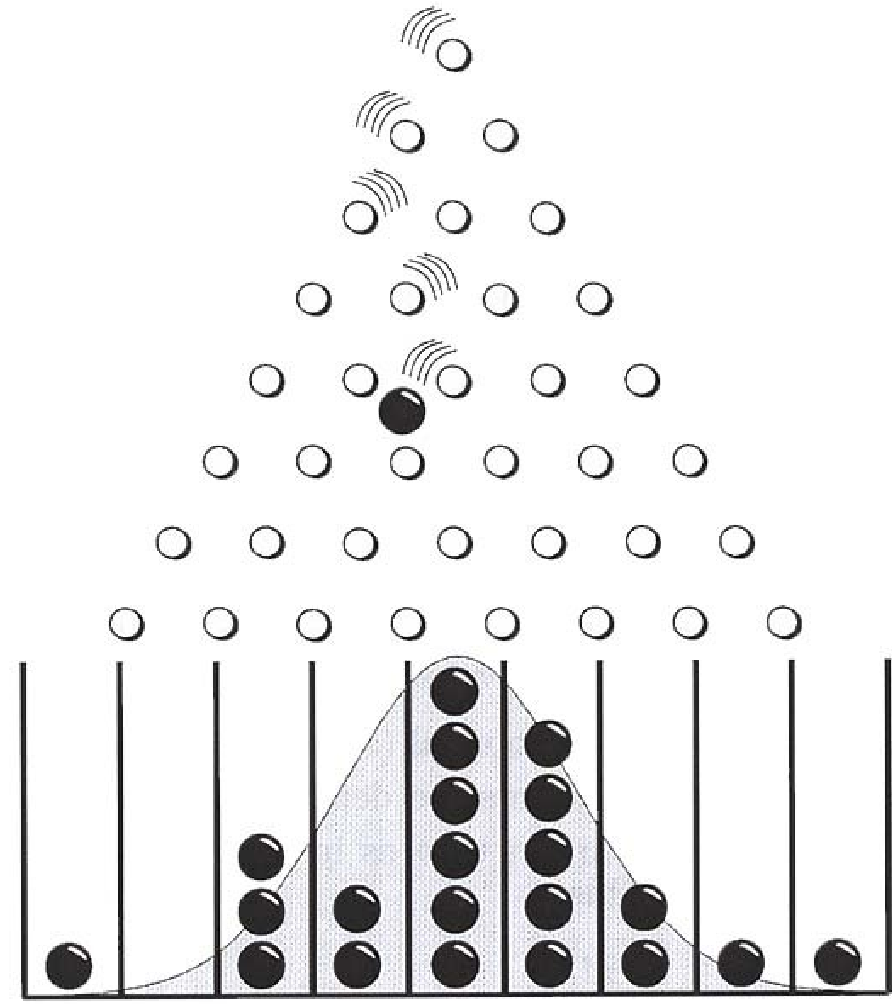
- Zatem prawdopodobieństwo wyrzucenia 6,7,8 jedynek pod rząd to odpowiednio 1/256, 1/512 i 1/1024

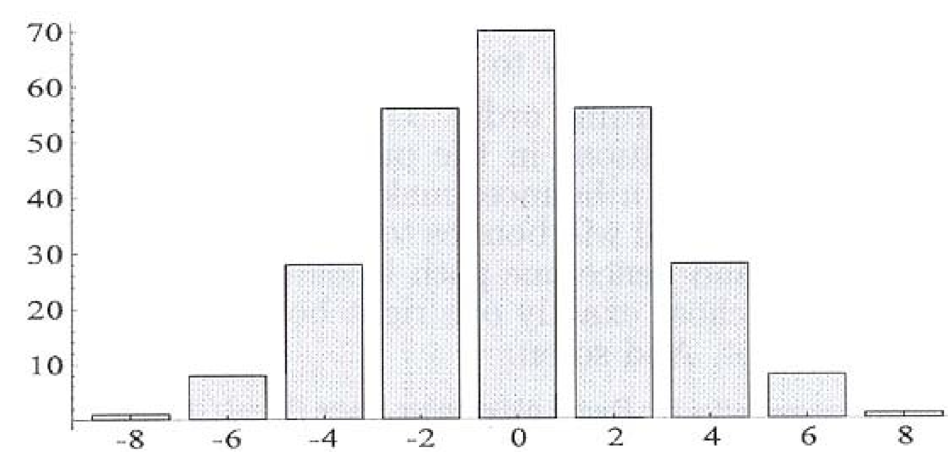
# Prawdopodobieństwo wylosowania ciągów samych jedynek

Jeżeli prawdopodobieństwo wyrzucenia 8 jedynek pod rząd to 1/1024, ile razy trzeba rzucić monetą, żeby średnio zaobserwować jeden ciąg 8 jedynek w serii?

# Deska Galtona

Pochylona deska z wbitymi gwoździami ułożonymi w trójkąt. Można jej użyć do wizualizacji wielokrotnego rzucania monetą





# Deska Galtona

- Jeżeli prawdopodobieństwo skoku w prawo lub w lewo na każdym gwoździu jest takie samo, to prawdopodobieństwo rozkładu na ostatnim poziomie dane jest przez trójkąt Pascala
- Program **Galton**

| n \ s | -9 | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | | | |
| 4 | | | | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | | | |
| 5 | | | | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | | | |
| 6 | | | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | | | |
| 7 | | | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 | | |
| 8 | | 1 | | 8 | | 28 | | 56 | | 70 | | 56 | | 28 | | 8 | | 1 | |
| 9 | 1 | | 9 | | 36 | | 84 | | 126 | | 126 | | 84 | | 36 | | 9 | | 1 |

# Trójkąt Pascala

Trójkąt Pascala powstaje przy obliczaniu n-tej potęgi dwumianu. Każdy współczynnik w trójkącie Pascala równy jest liczbie dróg jakimi można do niego dojść

| n \ s | -9 | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | | | |
| 4 | | | | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | | | |
| 5 | | | | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | | | |
| 6 | | | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | | | |
| 7 | | | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 | | |
| 8 | | 1 | | 8 | | 28 | | 56 | | 70 | | 56 | | 28 | | 8 | | 1 | |
| 9 | 1 | | 9 | | 36 | | 84 | | 126 | | 126 | | 84 | | 36 | | 9 | | 1 |

# Współczynniki dwumianu

- Liczby w n-tym wierszu trójkąta Pascala, zwane współczynnikami dwumianowymi, oznaczane są symbolem Newtona i dane są wzorem:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Zatem prawdopodobieństwa trafienia do odpowiedniej przegródki wynoszą

$$p(n,k)=\frac{n!}{2^n k!(n-k)!}$$

- Zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n} p(n,k)=1$$

# Błądzenie przypadkowe

- Ruch punktu na prostej
  lub w przestrzeni o dowolnym wymiarze
  polegający na wykonywaniu
  losowych kroków o stałej długości
  w jednym z kilku wybranych kierunków.

- Deska Galtona jest równoważna błądzeniu przypadkowemu na prostej.

- Błądzenie przypadkowe jest modelem ruchu cząstki Browna

# Spacery losowe – model dyfuzji

- Błądzenie przypadkowe (spacer losowy) w przestrzeni stanowi model dyfuzji i ruchów Browna – rozprzestrzeniania się cząsteczek w danym środowisku.
- Średnia odległość od punktu początkowego rośnie z czasem $t$ jak $\sqrt{t}$
- Program **Smoluchowski**

# Wzór Stirlinga

- Prawdopodobieństwo powrotu do miejsca startu wynosi

$$p(2n,n)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!}$$

- Dla n = 2,4,6,8,10,12... otrzymujemy 1/2, 3/8, 5/16, 35/128, 63/256, 231/1024...
- Ze wzoru Stirlinga

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$$

otrzymujemy przybliżenie:

$$p(2n,n)\approx\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}$$

# Asymptotyka rozkładu dwumianowego

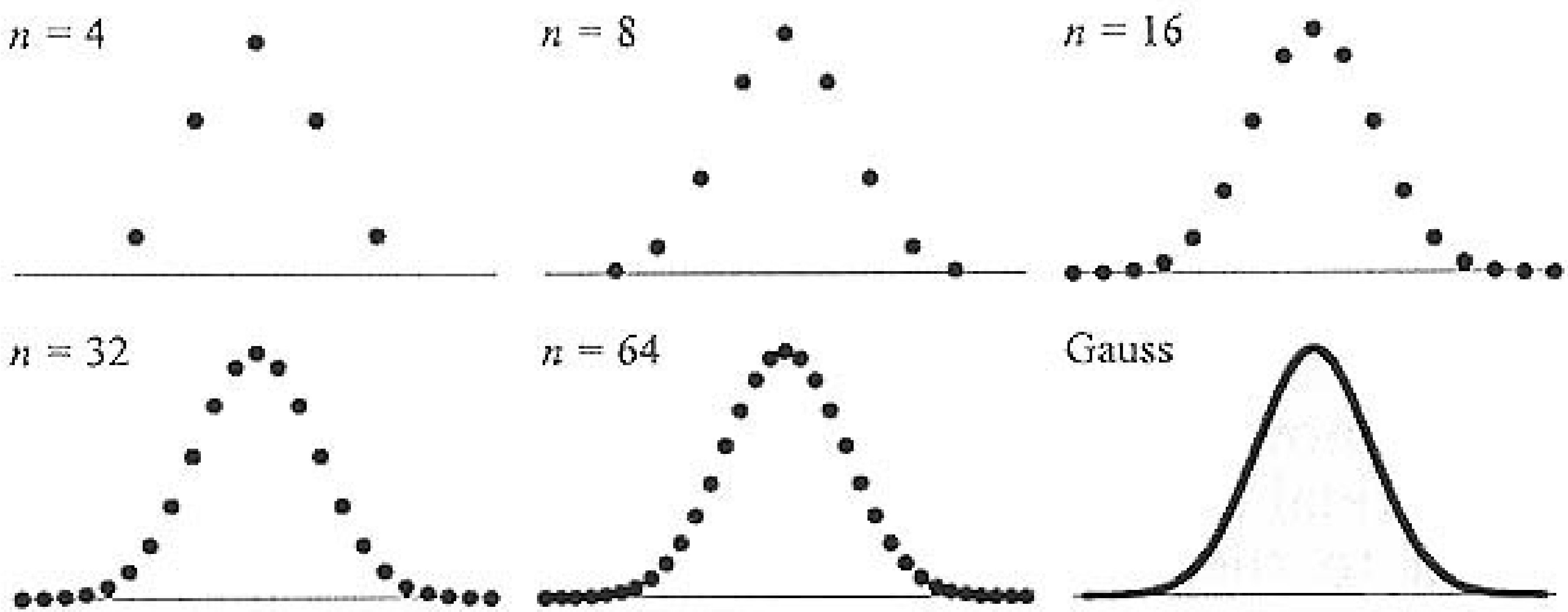
- Widzimy, że prawdopodobieństwo powrotu cząstki do punktu startu maleje do 0
- Zauważmy, że także liczba możliwych wyników rośnie. Żeby badać zachowanie rozkładu dla dużych *n* musimy go znormalizować.
- Mnożąc prawdopodobieństwa przez $\sqrt{n/2}$ i tak samo zwiększając skalę na osi *x* otrzymujemy dla dużych *n* rozkład Gaussa:

$$p(x)=\sqrt{1/\pi}\exp(-x^2)$$

# Asymptotyka rozkładu dwumianowego

- Mnożąc prawdopodobieństwa przez $\sqrt{n/2}$ i tak samo zwiększając skalę na osi *x* otrzymujemy dla dużych *n* rozkład Gaussa:

$$p(x) = \sqrt{1/\pi}\exp(-x^2)$$



# Generatory liczb losowych

- Komputery generują liczby pseudolosowe, nie losowe.
- Wygenerowane liczby powtarzają się po pewnym czasie. Im dłuższy okres, tym lepszy generator. Im lepieje „potasowane” liczby, tym lepszy generator.

# Inne źródła liczb losowych

- Tabele liczb losowych,
  np. rozwinięcia liczb normalnych

- Pomiary fizyczne odpowiednich układów

- Do czego potrzebujemy losowych ciągów?
  Do każdego praktycznego zastosowania teorii prawdopodobieństwa:
  - Wybór próbki statystycznej
  - Gry matematyczne (np. negocjacje)
  - Obliczenia metodą Monte Carlo

# Liczby normalne ponownie

- Liczba normalna – liczba, w której rozwinięciu w danym układzie każdy blok cyfr jest tak samo prawdopodobny jak każdy inny blok tej samej długości
- Rozwijają liczbę normalną w bazie o podstawie 36 możemy generować losowe teksty: 10 cyfr + 26 liter łacińskich, albo 35 polskich liter i spacja.
- Przykład rozwinięcia liczby pi po polsku.

# Prawdopodobieństwo wystąpienia dowolnego tekstu

- Trzydziestotomowa encyklopedia Brytannica zawiera około 30 milionów znaków. Prawdopodobieństwo wystąpienia jej tekstu w przypadkowym tekście wynosi

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{30\,000\,000} \approx \left(\frac{1}{10}\right)^{45\,000\,000}$$

- Prawdopodobieństwo wystąpienia krótkich słów, jak „Budda” wynosi

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{5} \approx \left(\frac{1}{60\,000\,000}\right)$$

czyli w tekście długości 60 mln znaków oba te słowa powinny wystąpić przynajmniej raz

# Kodowanie tekstów w rozwinięciach

- Znajdowanie tekstów w rozwinięciach liczb normalnych nie tylko zależy od podstawy ale i od kodowania, tj. od tego co przypiszemy danemu symbolowi w rozwinięciu