MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 022 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula

Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

wkrótce drugie wydanie, rozszerzone

Informacja i niepewność

- Matematyczna teoria informacji zajmuje się pojemnością kanału transmisji informacji, zupełnie abstrahuje od znaczenia, wartości i sensu przekazywanej informacji.
- Informacja i niepewność to dwie strony tego samego medalu: zdobywając informację usuwamy niepewność i na odwrót, tracąc informację powiększamy niepewność.
- Im większa niepewność co do poszukiwanego wyniku, tym więcej informacji zdobywamy poznając ten wynik.

Bit

- Miarą informacji jest **bit –** skrót od binary digit. Jest to miara informacji otrzymanej w odpowiedzi na **elementarne pytanie**, to jest pytanie na które odpowiedź może brzmieć tylko „tak” lub „nie”.

- Większe jednostki to **bajt**, **kilobajt**, **megabajt**, itd.

- UWAGA:
  kilometr to 1000=10^3 metrów
  kilobajt to 1024 = 2^{10} bajtów

Nośniki informacji

- Informacja może mieć różne postacie: dźwięku, obrazu, tekstu, filmu. My skupimy się na tekście.
- Tekst jest uporządkowanym ciągiem znaków z pewnego alfabetu. Ten sam tekst można zapisać w różnych alfabetach, podobnie jak liczby można zapisać w różnych systemach.
- My będziemy używać alfabetu dwójkowego (binarnego). Wtedy każdy znak niesie ze sobą jeden bit informacji.

Własności informacji

- Przyjmijmy, że informacja jest zapisana w alfabecie binarnym (0,1)
- Słowem binarnym jest ciąg zer i jedynek o długości N. Liczba N mierzy objętość nośnika informacji. Informacja zawarta w słowie jest proporcjonalna do N.
- Informacja, jaka może być zawarta w danym ciągu znaków jest proporcjonalna do długości tego ciągu. (Informacja jest wielkością **ekstensywną**)

Miara informacji

- Postulujemy zatem, żeby miarą informacji była długość słowa binarnego

  Informacja H = Długość_słowa_binarnego

- Istnieje 2^N słów binarnych o długości N znaków. Zatem

  Długość_słowa = N = $\log_2$ (Liczba_słów)=$\log_2$ (2^N)

Miara informacji cd

- Jeżeli prawdopodobieństwo wystąpienia każdego słowa jest takie samo, to wynosi ono

$$p = \frac{1}{\text{Liczba\_słów}}$$

- Wobec tego informacja zawarta w pojedynczym słowie wynosi

$$H = - \log_2 (p)$$

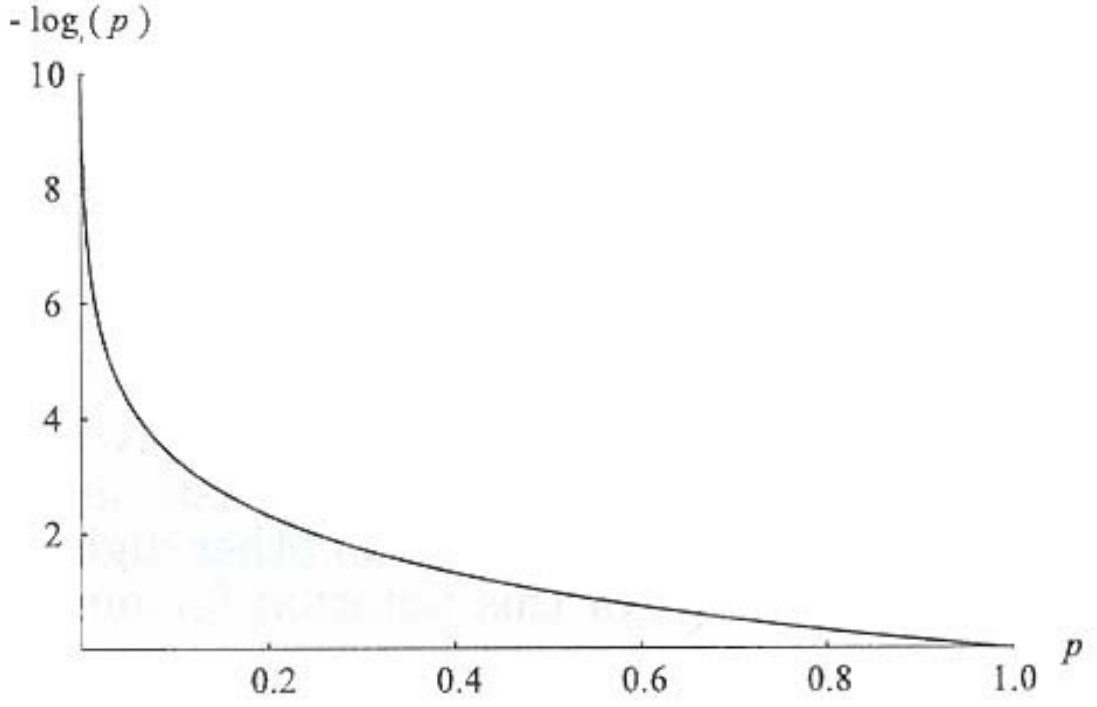
Wzór Shannona

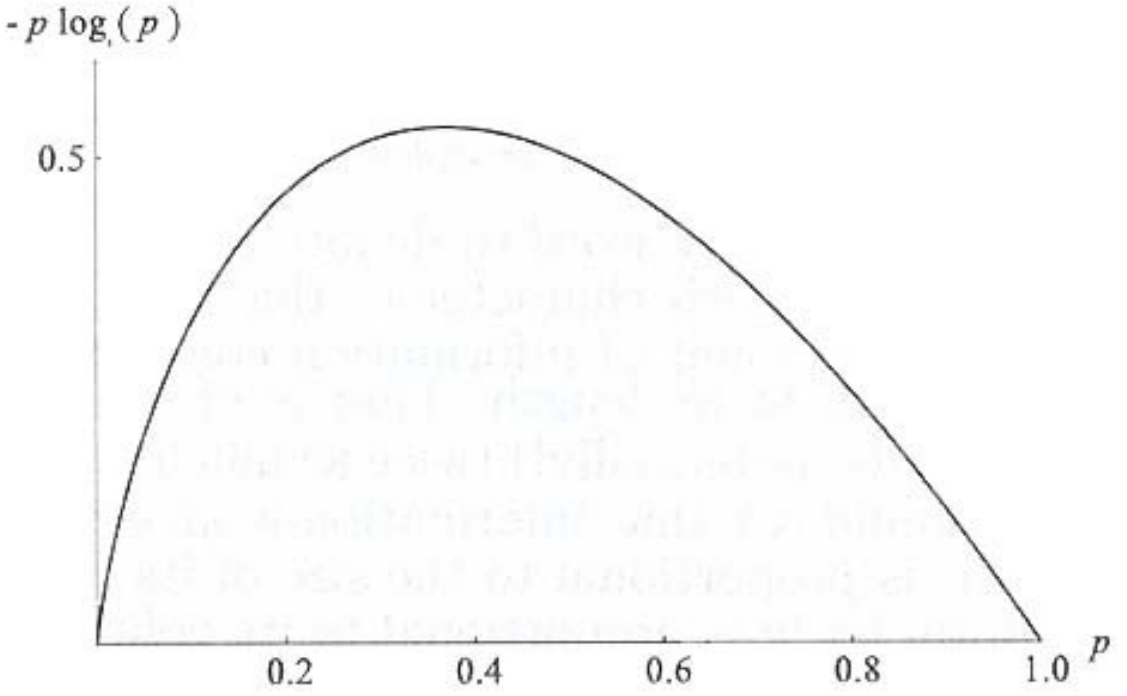
- Claude Shannon uogólnił tą intuicję do przypadków, kiedy różne słowa występują z różnymi prawdopodobieństwami.
- Według niego, zawartość informacyjna przekazu złożonego z *n* znaków wyrażona jest przez prawdopodobieństwa p_i występowania tych znaków

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i)$$

- Wielkość *H* oznacza informację mierzoną w bitach. Nazywa się ją **entropią informacyjną**.

$-P \log_2(P)$



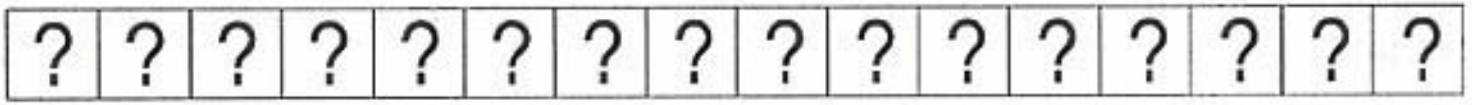


Gra w 20 pytań

- Pokażemy, że entropia równa jest liczbie pytań potrzebnych do odgadnięcia słowa.
- Rozważmy uproszczoną sytuację, kiedy jest 2^N równoprawdopodobnych słów o długości N. Ponumerujmy je wszystkie liczbami naturalnymi od 1 do 2^N.
- Mamy 2^N zakrytych komórek. W jednej z nich jest „skarb”. Znalezienie „skarbu” jest tym samym co odgadnięcie słowa.

Najprostsza strategia

Initially we know nothing:

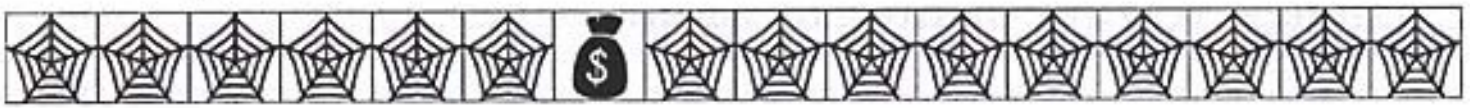


After the first question we know:

After the second question we know:

After the third question we know:

After four questions we know were the treasure is:



20 pytań cd

- Liczba pytań potrzebna do uzyskania pełnej informacji równa jest początkowej niepewności
- Na ogół prawdopodobieństwa wystąpienia różnych słów nie są takie same.
- Kiedy mamy odgadnąć słowo postaci KU_A nie wiemy, czy jest to KUFA, KULA, KUMA, KUNA, KUPA czy KURA.
- Kiedy mamy słowo postaci ŚW_T, to nie ma problemu.

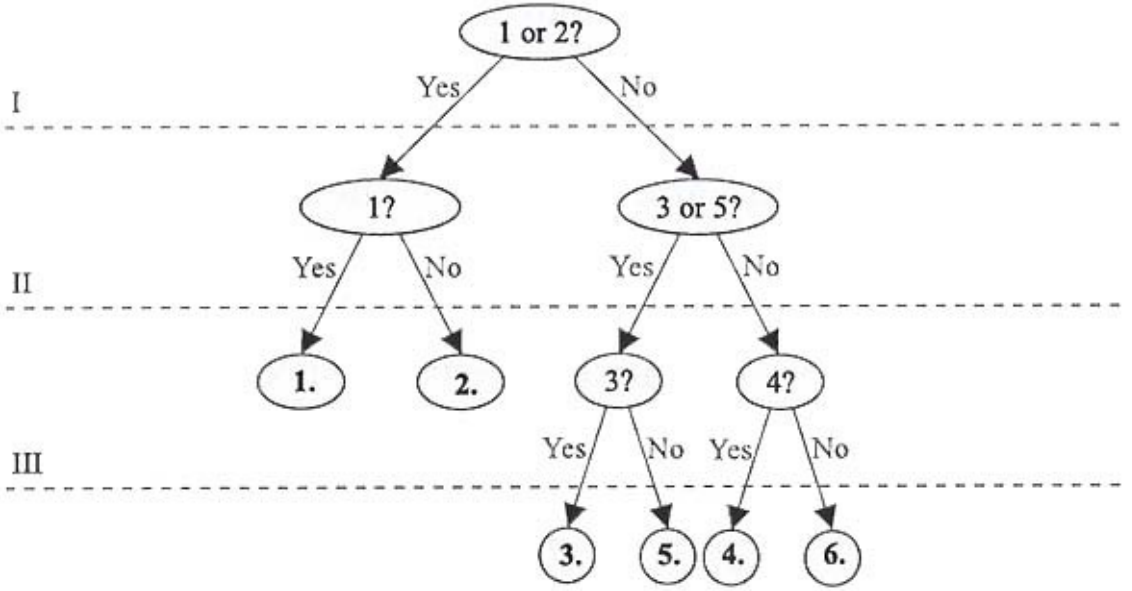
Rozkład 1

- Rozważmy skarb ukryty w jednej z 4 komórek, z prawdopodobieństwami $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.125$, $p_4 = 0.125$
- Pierwotna strategia daje średnio 2 pytania do osiągnięcia sukcesu
- Lepsza strategia:
  - Czy skarb jest w pierwszej komórce?
  - Czy skarb jest w drugiej komórce?
  - Czy skarb jest w trzeciej komórce?
- Średnio prowadzi ona do $1*0.5+2*0.25+3*0.25=7/4 < 2$ pytań zatem jest lepsza od bisekcji.

Rozkład 2

- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:
  $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 1/5$,
  $p_4 = 2/15$, $p_5 = 1/15$, $p_6 = 1/15$

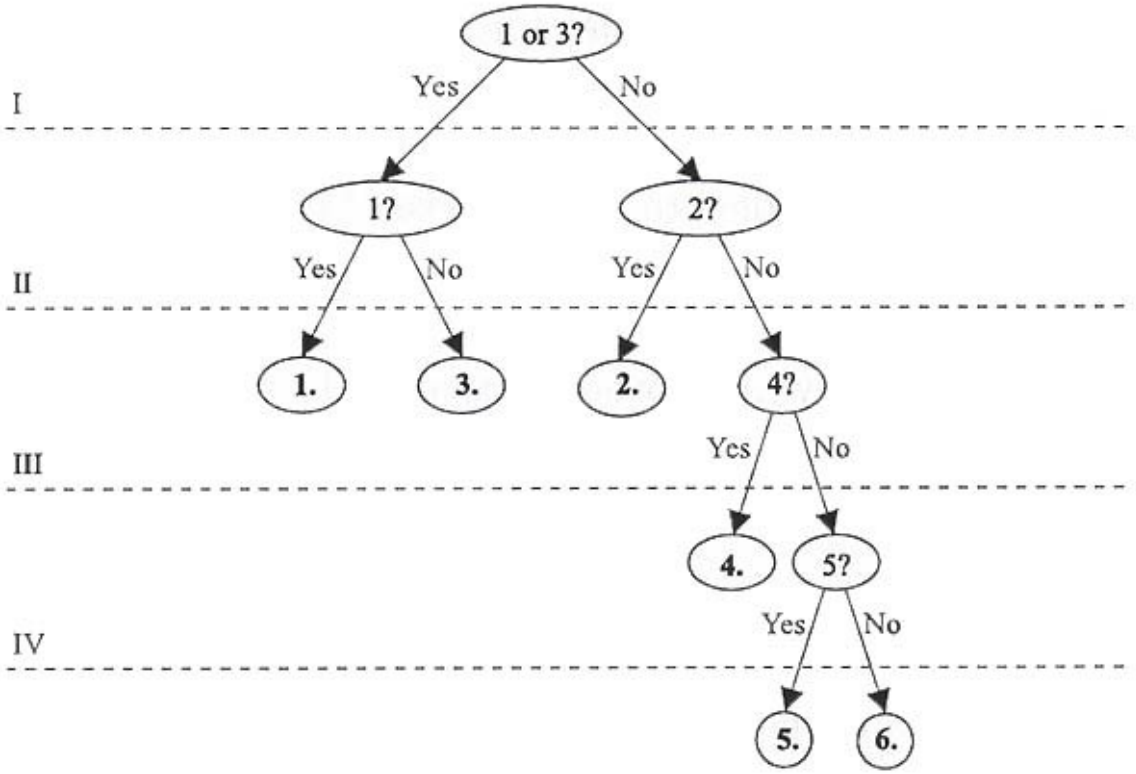
Średnia liczba pytań wynosi tu 37/15



Rozkład 2 – druga strategia

- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:
  $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 1/5$,
  $p_4 = 2/15$, $p_5 = 1/15$, $p_6 = 1/15$

Średnia liczba pytań wynosi tu 36/15



Optymalna strategia – algorytm Huffmana

- Z początkowego rozkładu $p^0_1, p^0_2, \ldots, p^0_n$ wybieramy dwa najmniej prawdopodobne zdarzenia p^0_i oraz p^0_j.
- Łączymy je w jedno o prawdopodobieństwie p^1_k, mamy nowy rozkład $p^1_1, p^1_2, \ldots, p^1_{n-1}$
- Powtarzamy procedurę $n-1$ razy
- W ten sposób, od dołu, powstaje optymalne **drzewo pytań**.

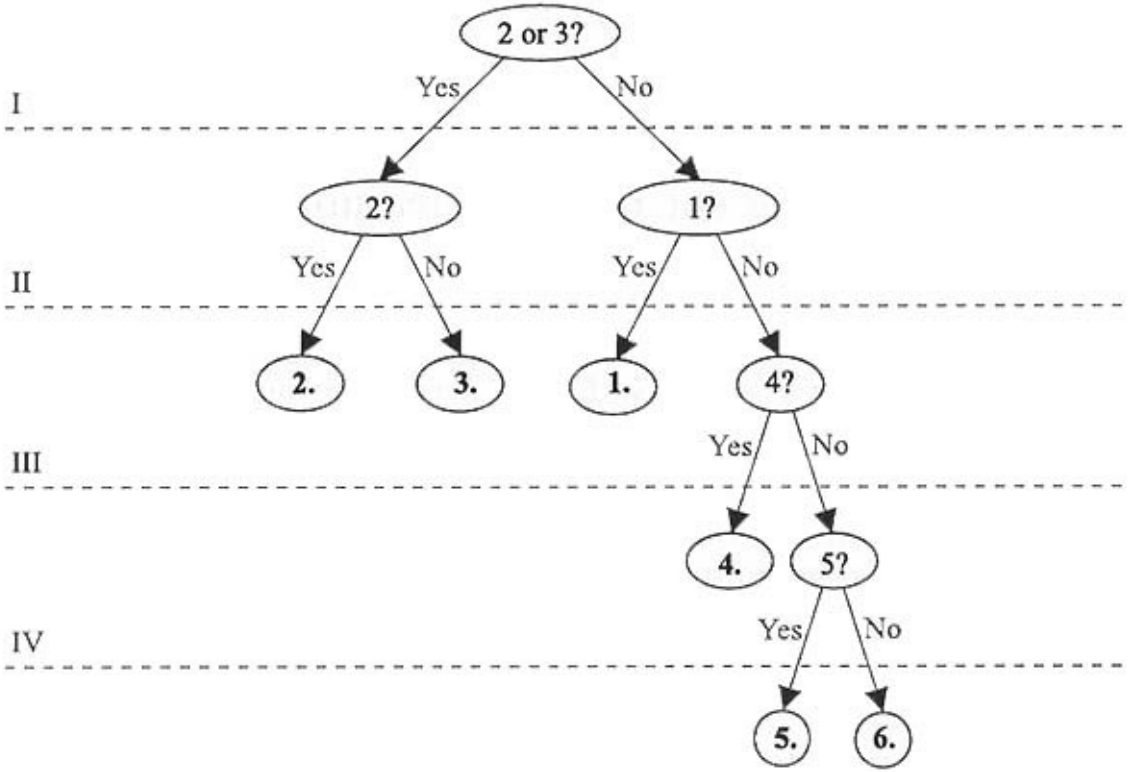
Przykład działania strategii

- Zaczynamy od rozkładu $p^0_1=1/3$, $p^0_2=1/5$, $p^0_3=1/5$, $p^0_4=2/15$, $p^0_5=1/15$, $p^0_6=1/15$
- Łączymy p^0_5 i p^0_6 w p^1_5. Dostajemy: $p^1_1=1/3$, $p^1_2=1/5$, $p^1_3=1/5$, $p^1_4=2/15$, $p^1_5=2/15$
- Łączymy p^1_4 i p^1_5 w p^2_4. Dostajemy: $p^2_1=1/3$, $p^2_2=1/5$, $p^2_3=1/5$, $p^2_4=4/15$
- Łączymy p^2_2 i p^2_3 w p^3_3. Dostajemy: $p^3_1=1/3$, $p^3_2=4/15$, $p^3_3=6/15$
- Łączymy p^3_1 i p^3_2 w p^4_2. Dostajemy: $p^4_1=9/15$, $p^4_2=6/15$

Rozkład 2 – trzecia strategia

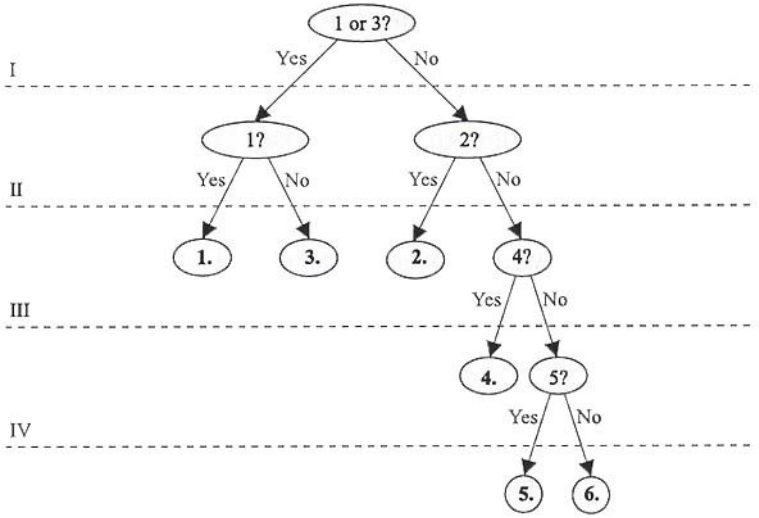
- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:
  $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 1/5$,
  $p_4 = 2/15$, $p_5 = 1/15$, $p_6 = 1/15$

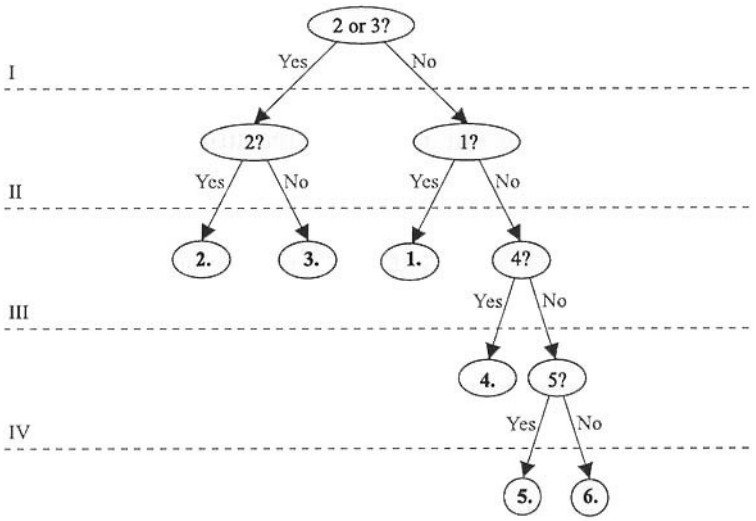
Średnia liczba pytań wynosi tu również 36/15



Porównanie dwóch ostatnich strategii

- Rozważmy rozkład 6 komórkowy:
  $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 1/5$,
  $p_4 = 2/15$, $p_5 = 1/15$, $p_6 = 1/15$





Średnia liczba pytań wynosi dla obu strategii 36/15

Średnia informacja

- Nasze rozważania pokazują, że entropia Shannona mierzy średnią informację obliczoną w przypadku, gdy znane są wszystkie prawdopodobieństwa elementarne.

- Ogólne twierdzenie o bezszumowym kodowaniu możemy sformułować tak:

  Nie istnieje strategia o średnio mniejszej liczbie pytań niż entropia Shannona

Doświadczenia Hymana

- R. Hyman pokazał, że czas reakcji na bodźce o określonej zawartości informacji jest proporcjonalny do entropii Shannona.

- Program **Hyman**