MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 022 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula

Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

wkrótce drugie wydanie, rozszerzone

Teoria gier

Dylemat więźnia (A. Tucker, 1950)

Siedzisz w więzieniu oskarżony o zbrodnię popełnioną wspólnie z drugim więźniem.

Jeżeli nie przyznacie się do winy, dostaniecie po roku jeżeli obaj się przyznacie, dostaniecie po 10 lat.

Jeżeli jeden się przyzna, a drugi nie, to pierwszy wyjdzie na wolność, a drugi dostanie 20 lat.

Nie masz możliwości kontaktu z kompanem, do tego nie macie do siebie zaufania.

Co zrobić?

Teoria gier (J. Von Neumann, 1928)

- Teoria gier dostarcza modeli matematycznych do podejmowania decyzji w sytuacjach konfliktowych
- Konflikt może oznaczać sprzeczność interesów stron, np. w socjologii lub ekonomii, ale także konflikt wojenny
- Jej celem jest znajdowanie optymalnych strategii w sytuacji konfliktowej

Gra i strategia

- Grą nazywamy taką procedurę, której uczestnicy mają możliwość podejmowania decyzji (dokonywania wyboru)
- Strategią nazywamy ciąg wszystkich wyborów podjętych w trakcie gry od jej początku do samego końca.

Przykłady strategii

- W dylemacie więźnia każdy gracz (więzień) ma dwie strategie

- W grze w kółko i krzyżyk na planszy 3 na 3 mamy już prawie 9*7*5*3=945 strategii

- W grze w szachy strategii jest bardzo dużo: jeżeli w „typowej” partii gracz wykonuje ok. 30 ruchów i za każdym razem ma średnio 10 wyborów, to daje 10^{30} różnych strategii. Nawet jeżeli większość z nich jest na pierwszy rzut oka nierozsądna, i tak zostaje ogromna liczba strategii do przeanalizowania.

Analiza strategii

- Macierz gry, inaczej macierz wypłat, zawiera wyniki gry w zależności od strategii przyjętych przez graczy.
- Strategia dominująca: jedna optymalna odpowiedź dla wszystkich strategii przeciwnika
- tutaj:
przyznanie się do winy

Więzień I \ Więzień II	P	Z
P	(10, 10)	(0, 20)
Z	(20, 0)	(1, 1)

Iterowany dylemat więźnia

- Turnieje Axelroda
- Algorytmy genetyczne wybierające strategię
- Program **Axelrod**

Gry o sumie zerowej

- Gry dwuosobowe, w których suma wypłat w każdym polu macierzy wypłat wynosi 0.
- Większość dwuosobowych gier towarzyskich można przedstawić jako gry o sumie zerowej
- Von Neumann udowodnił, że wszystkie gry o sumie zerowej są rozwiązywalne, to znaczy dla każdej z nich istnieje optymalna strategia.

Przykład gry o sumie zerowej

- Teleturniej „Gwiazdy intelektu”
- Bierze udział Tata, Mama, Staś i Nel
- Kategorie: Kino, Piosenka, Sport, Telewizja
- W finale Rodzina wybiera jednego przedstawiciela, a prezenter jedną kategorię.
- Prezenter nie chce, żeby Rodzina wygrała nagrodę, Rodzina chce wygrać.
- Kogo rodzina powinna wystawić i jaką kategorię pytań powinien wybrać prezenter, żeby zmaksymalizować swoje szanse?

Ranking rodziny

R \ D	K	P	S	T	α_i
T	30	50	90	80	30
M	80	40	30	70	30
S	70	60	80	90	60
N	70	20	40	60	20
β_i	80	60	90	90	

Analiza sytuacji od strony Rodziny

R \ D	K	P	S	T	α_i
T	30	50	90	80	30
M	80	40	30	70	30
S	70	60	80	90	60
N	70	20	40	60	20
β_j	80	60	90	90	

Wybieramy Stasia!

- Wybieramy Tatę: jeżeli kategoria Kino, to szansa wygrania 30%
- Wybieramy Mamę: jeżeli kategoria Sport, to szansa wygrania 30%
- Wybieramy Stasia: jeżeli kategoria Piosenka, to szansa wygrania 60%
- Wybieramy Nel: jeżeli kategoria Piosenka, to szansa wygrania 20%

Analiza sytuacji od strony Prezentera

R \ D	K	P	S	T	α_i
T	30	50	90	80	30
M	80	40	30	70	30
S	70	60	80	90	60
N	70	20	40	60	20
β_i	80	60	90	90	

Wybieram piosenkę!

- Wybieram Kino: jeżeli wystawią Mamę, to mają 80% szans by wygrać
- Wybieram Piosenkę: jeżeli wystawią Stasia, to mają 60% szans by wygrać
- Wybieram Sport: jeżeli wystawią Tatę, to mają 90% szans by wygrać
- Wybieram Telewizję: jeżeli wystawią Stasia, to mają 90% szans by wygrać

Analiza sytuacji

- Rodzina wybiera *największą* wartość α_i

- Prezenter wybiera *najmniejszą* wartość β_i

- Zasada minimaksu

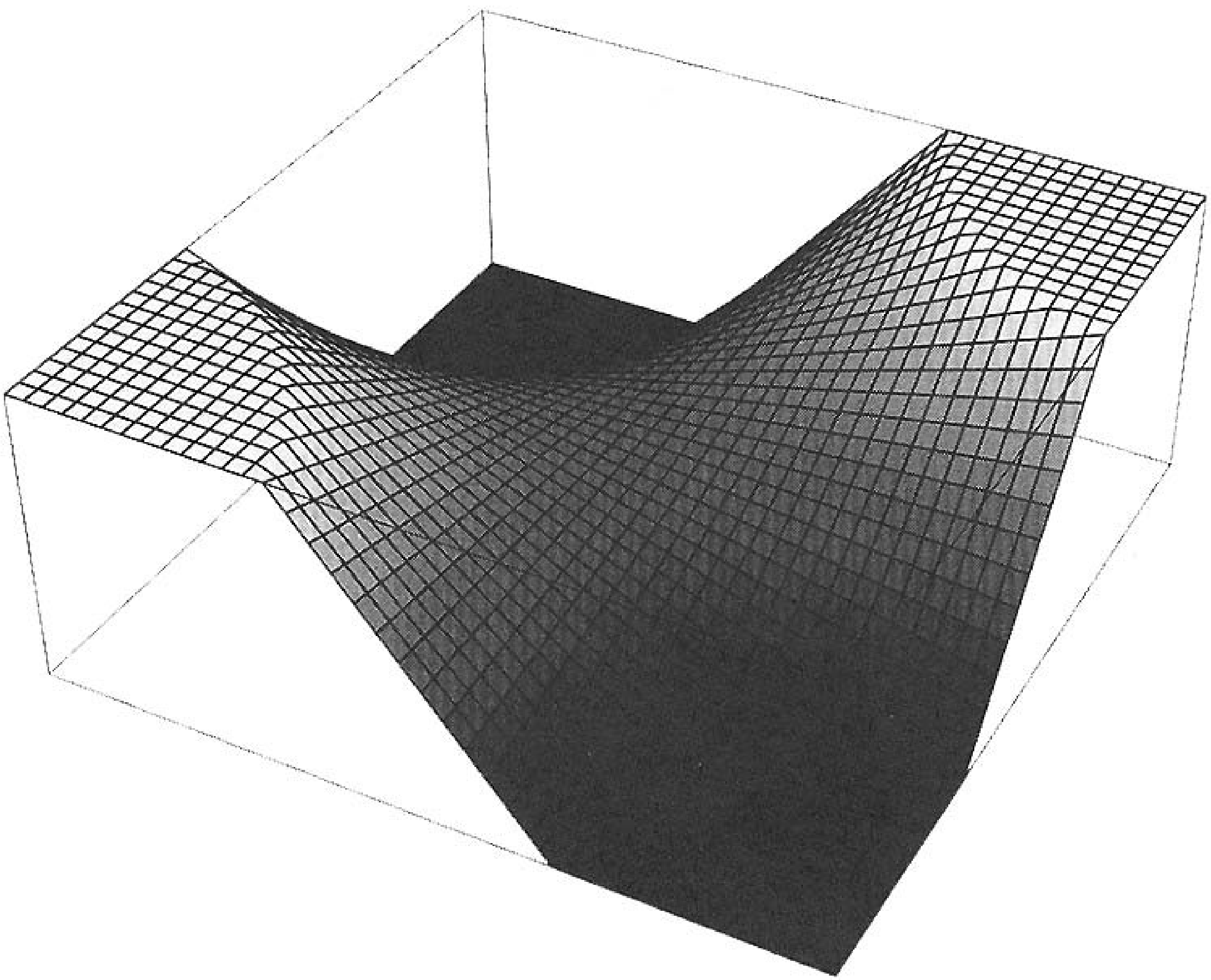
$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

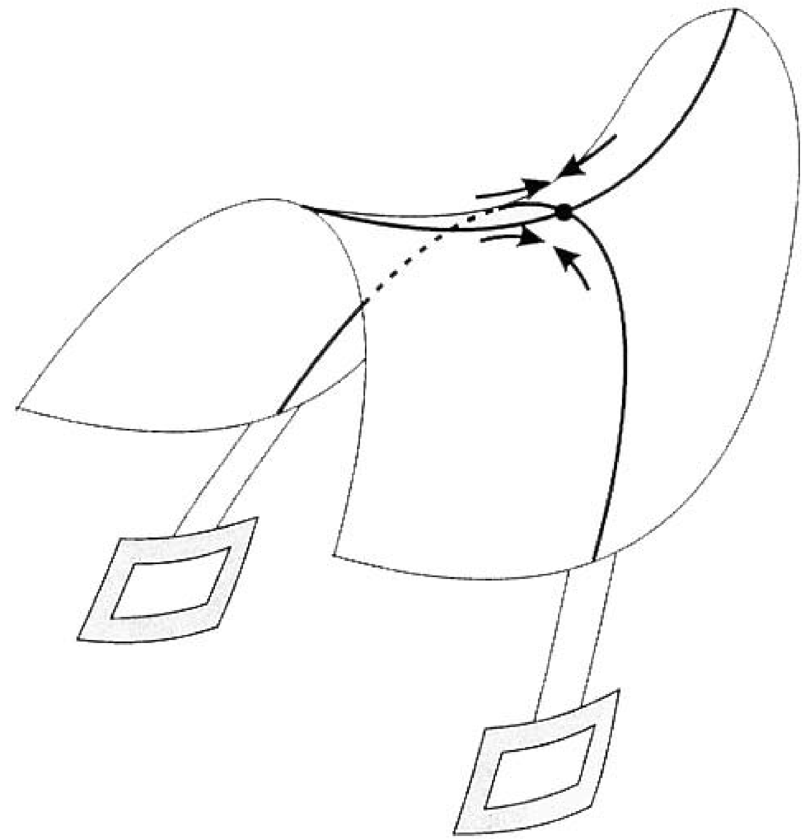
$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

- Wartości α i β noszą nazwę dolnej i górnej granicy gry

R \ D	K	P	S	T	α_i
T	30	50	90	80	30
M	80	40	30	70	30
S	70	60	80	90	60
N	70	20	40	60	20
β_j	80	60	90	90	

Punkt siodłowy





Jak grać kiedy granice gry są różne?

- Rozważmy inną tabelę gry:

D / R	K	P	S	T	α_i
T	30	50	90	80	30
M	80	40	60	70	40
S	70	30	80	90	30
N	70	20	40	60	20
β_j	80	50	90	90	

- Tym razem dolna i górna granica gry są różne:

$$\alpha=40\% < \beta=50\%$$

Strategia mieszana

- Von Neumann udowodnił, że każda gra o sumie zerowej posiada rozwiązanie, ale optymalna jest na ogół strategia mieszana.

- Strategia mieszana oznacza losowy wybór strategii z pewnym prawdopodobieństwem p_i

- Rodzina wystawia kandydata z prawdopodobieństwem p_i (i=M,T,S,N), prezenter wybiera jedną z dyscyplin z prawdopodobieństwem q_j (j=K,P,S,T).

Strategia mieszana

- Średnia wygrana rodziny wynosi:

$$\langle \alpha_j \rangle = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + p_3 a_{3j} + p_4 a_{4j}$$

- Średnia „przegrana” prezentera wynosi:

$$\langle \beta_i \rangle = q_1 a_{j1} + q_2 a_{j2} + q_3 a_{j3} + q_4 a_{j4}$$

- Idealnie byłoby, gdyby średnia wygrana rodziny nie zależała od decyzji prezentera.

- Von Neumann pokazał, że można tak wybrać p_i i q_j, że $\langle\alpha_j\rangle=\langle\alpha\rangle$, $\langle\beta_i\rangle=\langle\beta\rangle$, co więcej $\langle\alpha\rangle=\langle\beta\rangle=\nu$
  Innymi słowy gra posiada rozwiązanie mieszane

Zredukowany przykład

- Wystarczy ograniczyć się do Taty i Mamy, Kina i Piosenki:

R \ S	K	P
T	30	50
M	80	40

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

- Daje nam to układ równań do rozwiązania

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} = \nu, \quad q_1 a_{11} + q_2 a_{12} = \nu,$$
$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = \nu, \quad q_1 a_{21} + q_2 a_{22} = \nu,$$
$$p_1 + p_2 = 1, \qquad q_1 + q_2 = 1.$$

- W wyniku dostajemy:

$$p_1 = 2/3, \;\; p_2 = 1/3, \;\; q_1 = 1/6, \;\; q_2 = 5/6, \;\; \nu = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}.$$

Inne typy gier

- Stan równowagi Nasha:

  taki układ strategii graczy, że żaden gracz nie może poprawić swojej sytuacji, jeżeli wszyscy pozostali utrzymają swoją strategię

- Każda gra skończona ma przynajmniej jeden stan równowagi Nasha