

MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik

Instytut Biologii Doświadczalnej PAN
Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

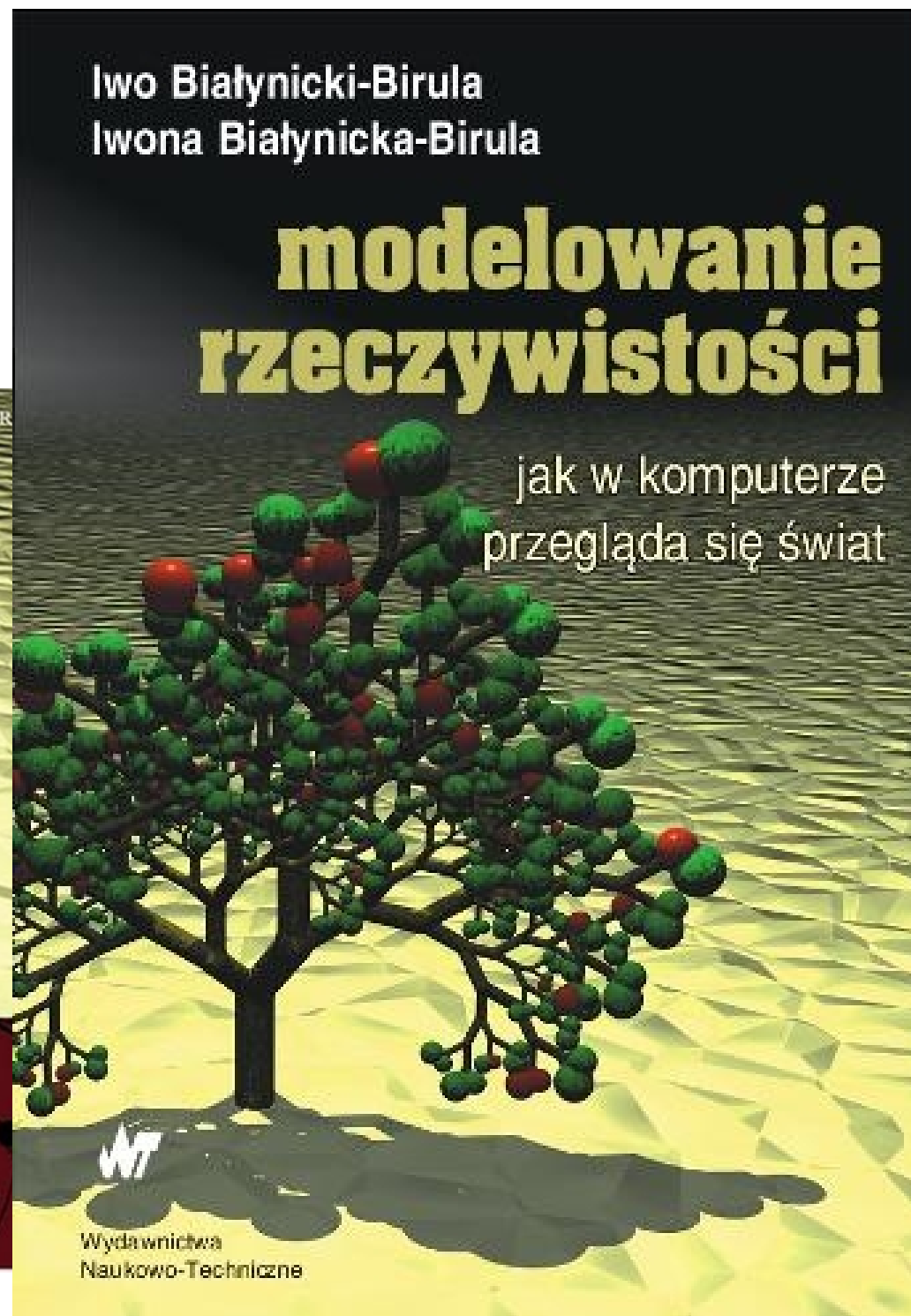
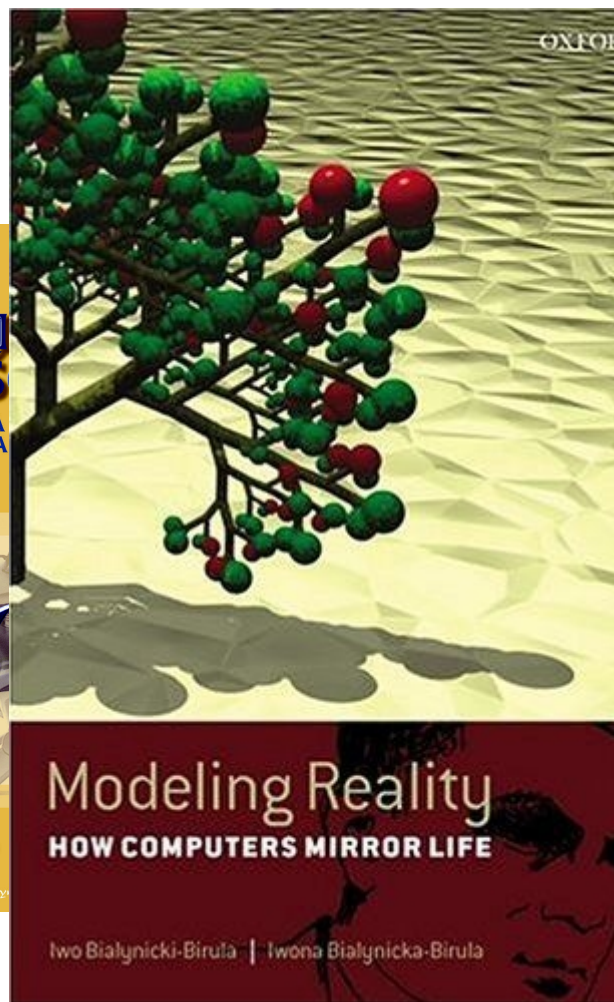
d.wojcik@nencki.gov.pl
dwojcik@swps.edu.pl

tel. 022 5892 424

<http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/>

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula
Iwona Białynicka-Birula



Układ dynamiczny

- *Układ*: zbiór obiektów, których zmiany w czasie chcemy badać
- *Dynamiczny*: zmieniający się w czasie zgodnie z pewną regułą

Typy układów dynamicznych

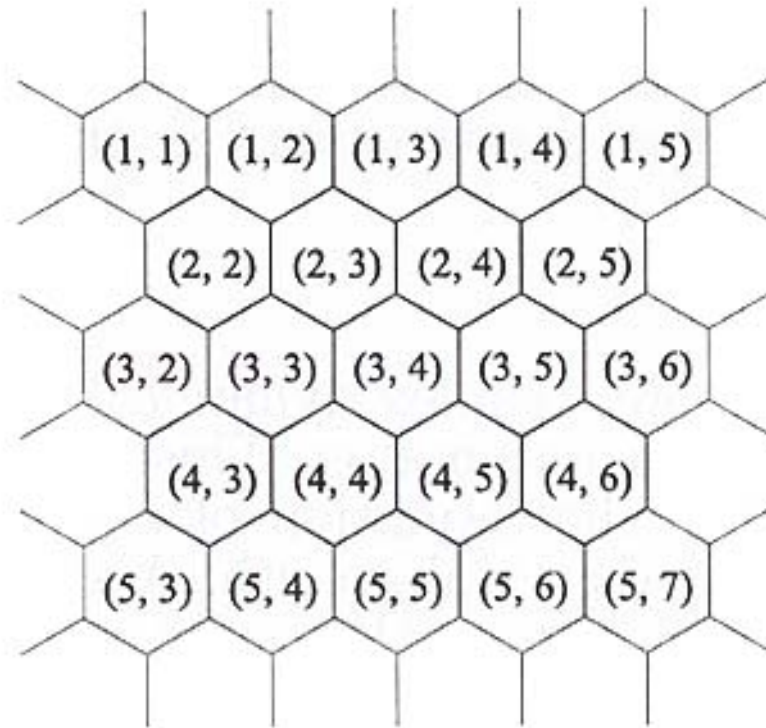
- Układy deterministyczne
 - Układy autonomiczne
 - Układy zależne od czasu
- Układy losowe (stochastyczne)

Przykład 1: Wyborcy

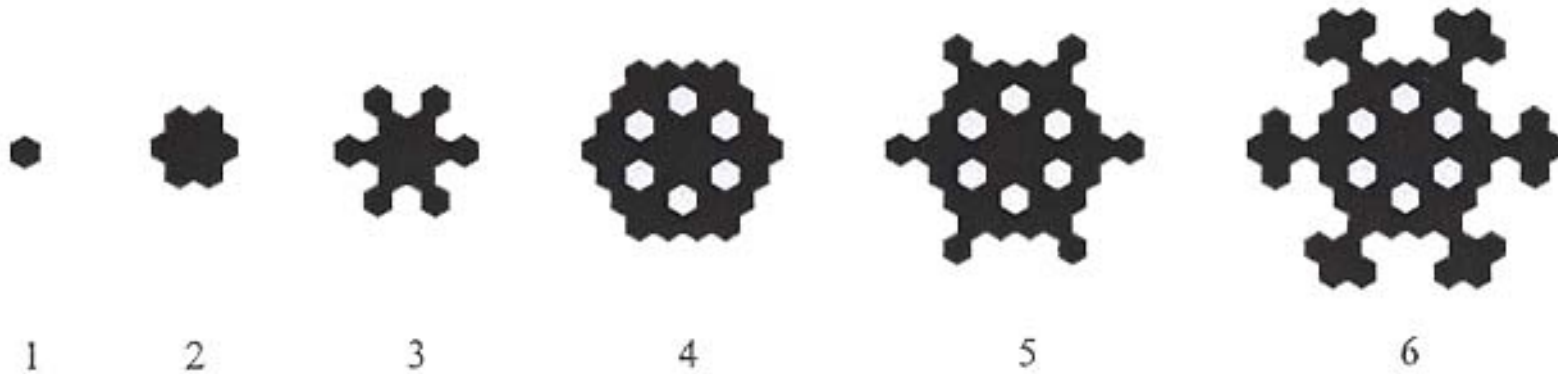
- *Stan układu*: Preferencje wyborcze grupy respondentów
- *Ewolucja*: Zmiany preferencji następują na skutek kontaktów międzyludzkich

Przykład 2: Płatek śniegu

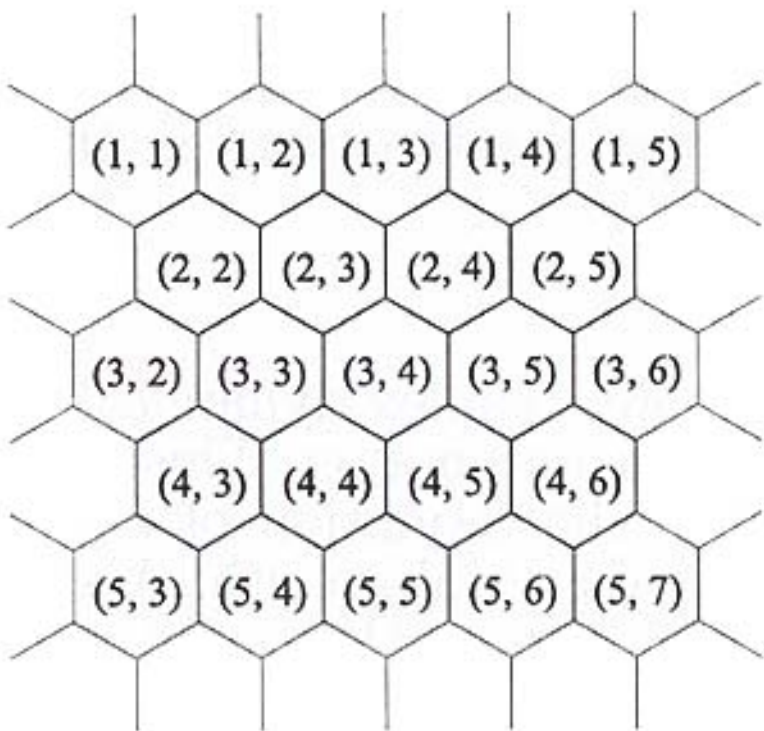
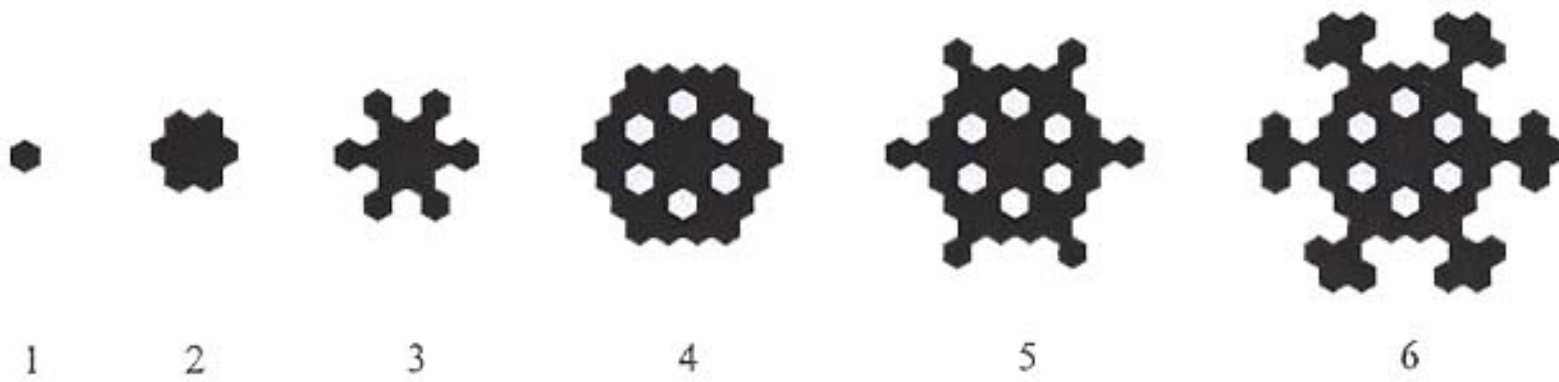
- Automat komórkowy na sieci o strukturze plastra miodu
- Ten sam stan początkowy zawsze daje ten sam stan końcowy (układ deterministyczny)



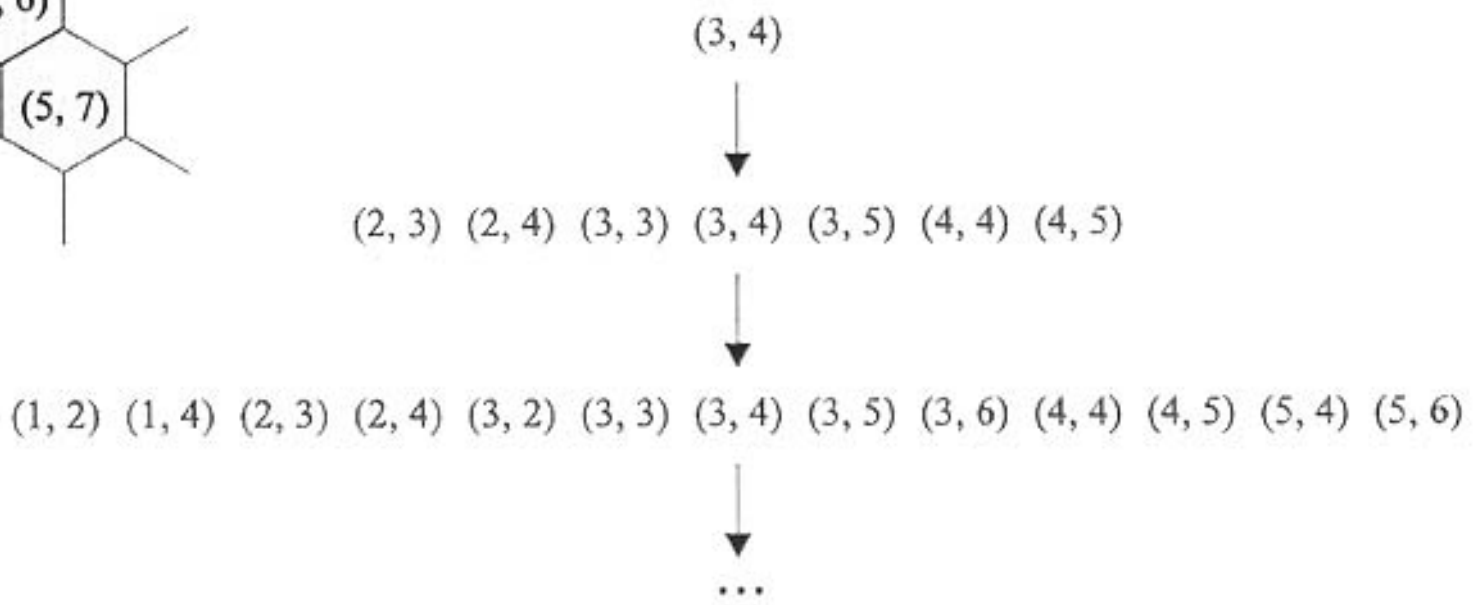
Płatek śniegu



Reguła: Nowy fragment powstaje w komórce sieci, która ma dokładnie jednego zmarzniętego sąsiada



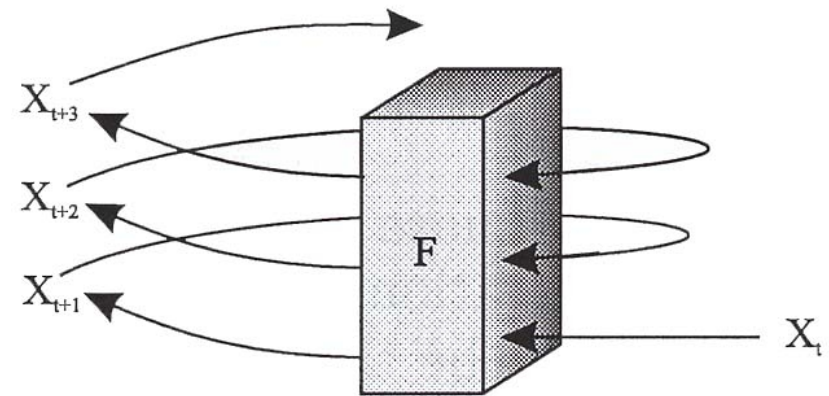
Płatek śniegu



Ewolucja układu dynamicznego

- Rozwój w czasie układu dynamicznego opisuje równanie ewolucji w postaci **wzoru iteracyjnego**

$$X_{n+1} = F_p(X_n)$$



- X_n i X_{n+1} opisują stan układu w chwili n i $n+1$
- F_p określa jakim zmianom ulega stan układu w kolejnych krokach iteracji

Przykład 3: algorytm Newtona

- Jak policzyć pierwiastek z **a**?
- Należy wybrać dowolną liczbę i iterować ją zgodnie z regułą

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

- Dlaczego?
Jeżeli $x < \sqrt{a}$ to $\sqrt{a} * x < a$, a więc $\frac{a}{x} > \sqrt{a}$
i na odwrót.

Przykład 3: pierwiastek z 2

- Weźmy $x_0=2$
- Wtedy
 - $x_1=1,5$
 - $x_2=1,416$
 - $x_3=1,414215$
 - $x_4=1,414213562374$
 - $x_5=1,414213562373095048801689$
 - ...
- I tak dalej

Kilka pojęć

- *Punkt stały*: stan układu, który się nie zmienia z czasem
- *Atraktor*: stan, do którego układ dąży z czasem
- *Dorzecze (basen) atraktora*: zbiór stanów początkowych, które dążą do danego atraktora

Przykład basenów atraktora

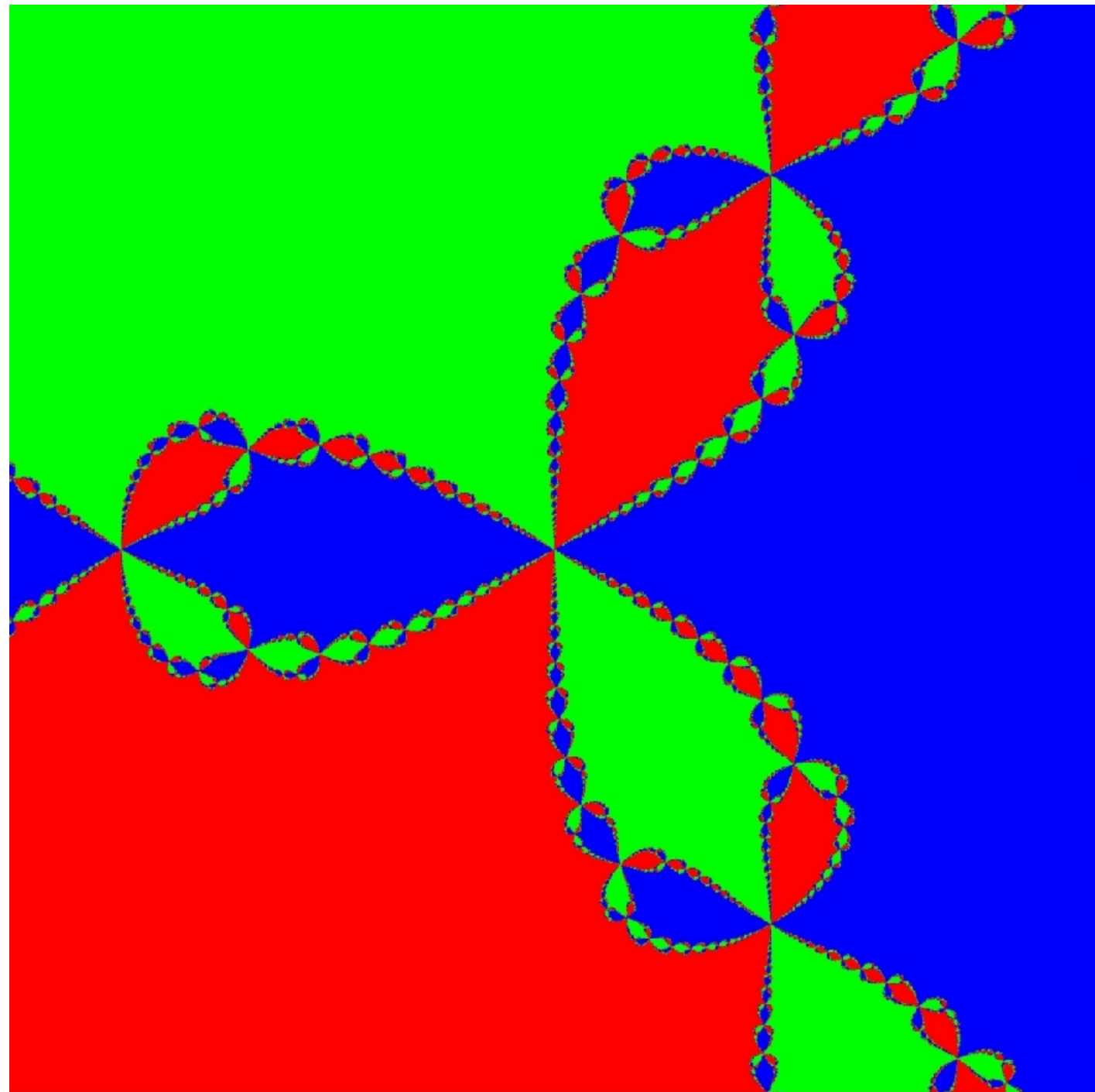
- Rozważmy odwzorowanie płaszczyzny

$$x_{t+1} = \frac{2}{3} x_t + \frac{1}{3} \frac{x_t^2 - y_t^2}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$
$$y_{t+1} = \frac{2}{3} y_t - \frac{1}{3} \frac{2x_t y_t}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$

- To odwzorowanie ma trzy atraktory:

$$(0, 0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$$

Baseny
pierwiastków
jedynki



Model Ehrenfesta: psy i pchły

- N pcheł siedzi na dwóch psach: na Azorze A_n , a na Burku B_n
- Co chwilę jedna z pcheł podejmuje decyzję o przeskoku z jednego psa na drugiego
- Jak zmienia się rozkład pcheł?
 $A_{n+1} = A_n - 1$ z prawdopodobieństwem A_n/N
 $A_{n+1} = A_n + 1$ z prawdopodobieństwem $(N-A_n)/N$

Determinizm a losowość

- Większość procesów w przyrodzie ma składowe deterministyczną i losową
- Jeżeli „szum” jest nieduży, modelujemy układ jako ściśle deterministyczny
- Jeżeli „szum” jest dominujący, modelujemy układ jako proces stochastyczny

W ogólności

- Jesteśmy bez szans...

Chaos deterministyczny

- Proste iteracje odwzorowań:
 - Funkcja liniowa
 - Funkcja logistyczna
- Układy z ciągłym czasem
- Wpływ topologii na ewolucję

Przykład: funkcja liniowa

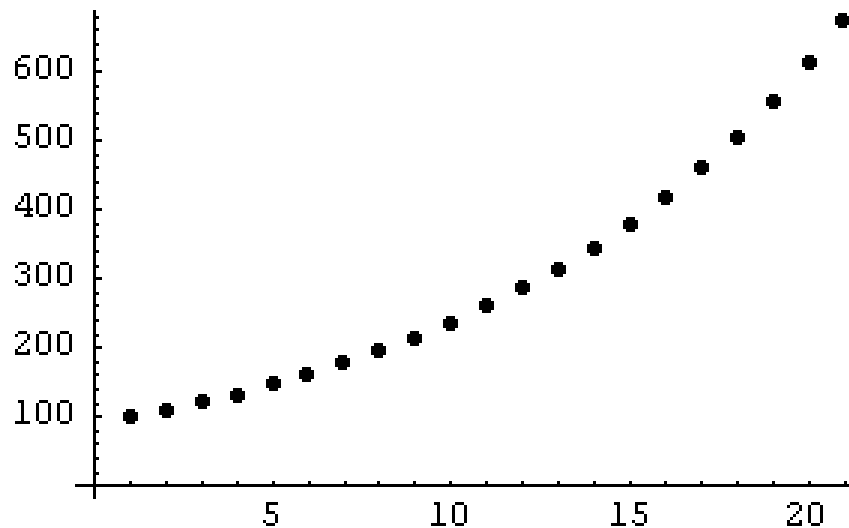
- Rozważmy populację much. Oznaczmy liczbę much w roku n -tym przez x_n . Załóżmy, że na każdą muchę w pokoleniu n średnio przypada R much w pokoleniu następnym. Wtedy ewolucja much jest dana przez:

$$x_{n+1} = R x_n$$

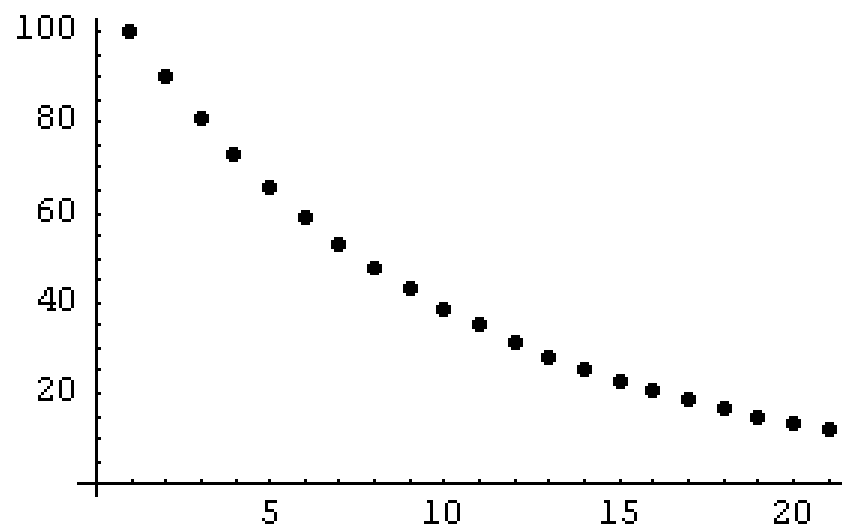
$$x_n = R^n x_0$$

Przykład: funkcja liniowa

- Stały wzrost ($R > 1$)



- Stały rozpad ($R < 1$)



Przykład: funkcja logistyczna

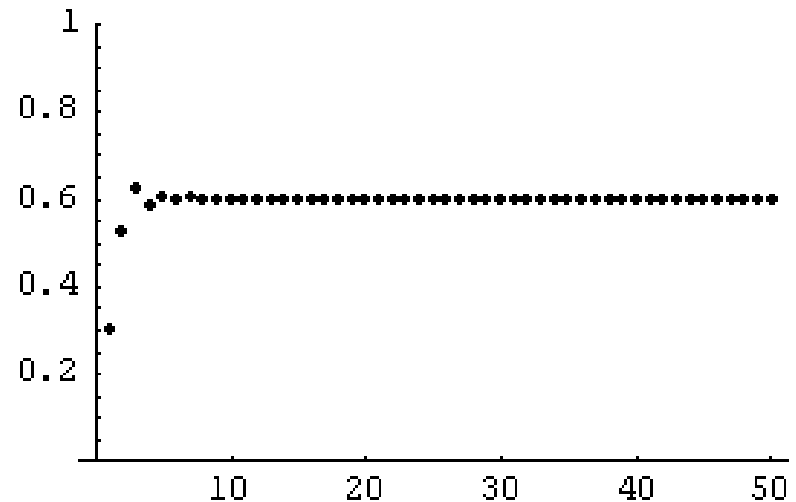
Model liniowy jest zbyt dużym uproszczeniem. Wzrost populacji zwykle ograniczony jest przez czynniki zewnętrzne: drapieżców, ograniczone zasoby, itp. Biorąc pod uwagę skończoną ilość dostępnego pożywienia dostajemy model zwany logistycznym. Jeżeli wzrost R jest pomniejszony o wielkość proporcjonalną do x_n to dostajemy:

$$x_{n+1} = (R - a x_n) x_n$$

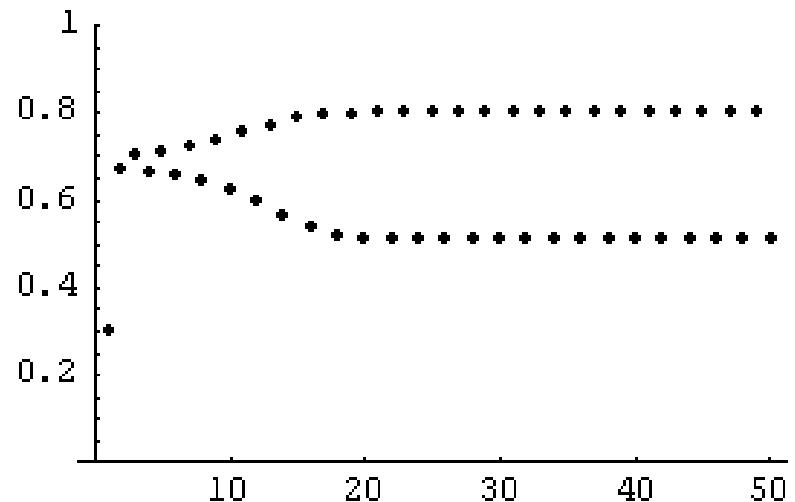
$$y_{n+1} = r (1 - y_n) y_n$$

Szereg czasowy

- W obszarze regularnym ($r = 2.5$)

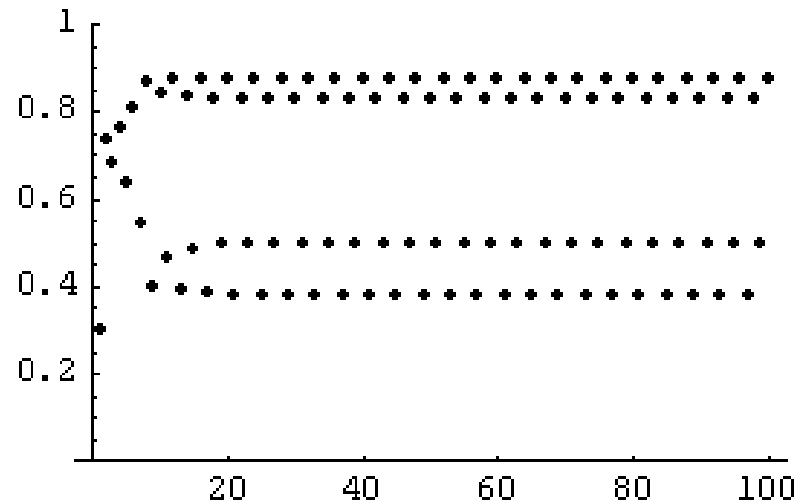


- W obszarze regularnym ($r = 3.2$)

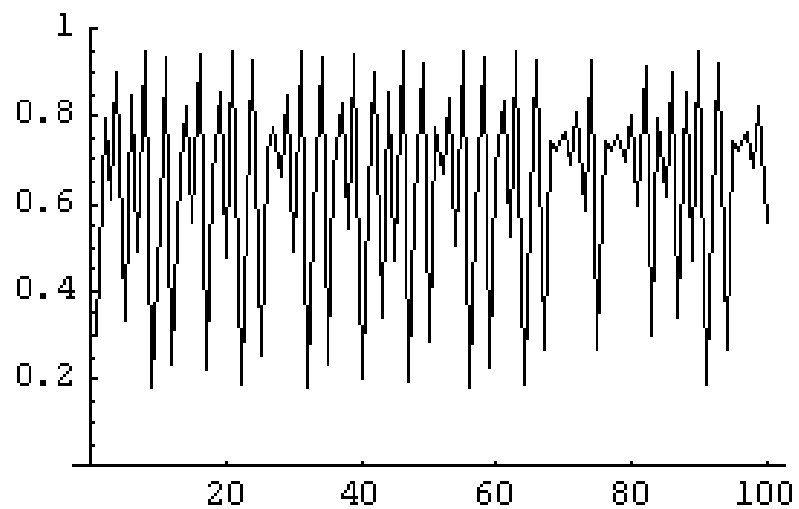


Szereg czasowy

- W obszarze regularnym ($r = 3.5$)

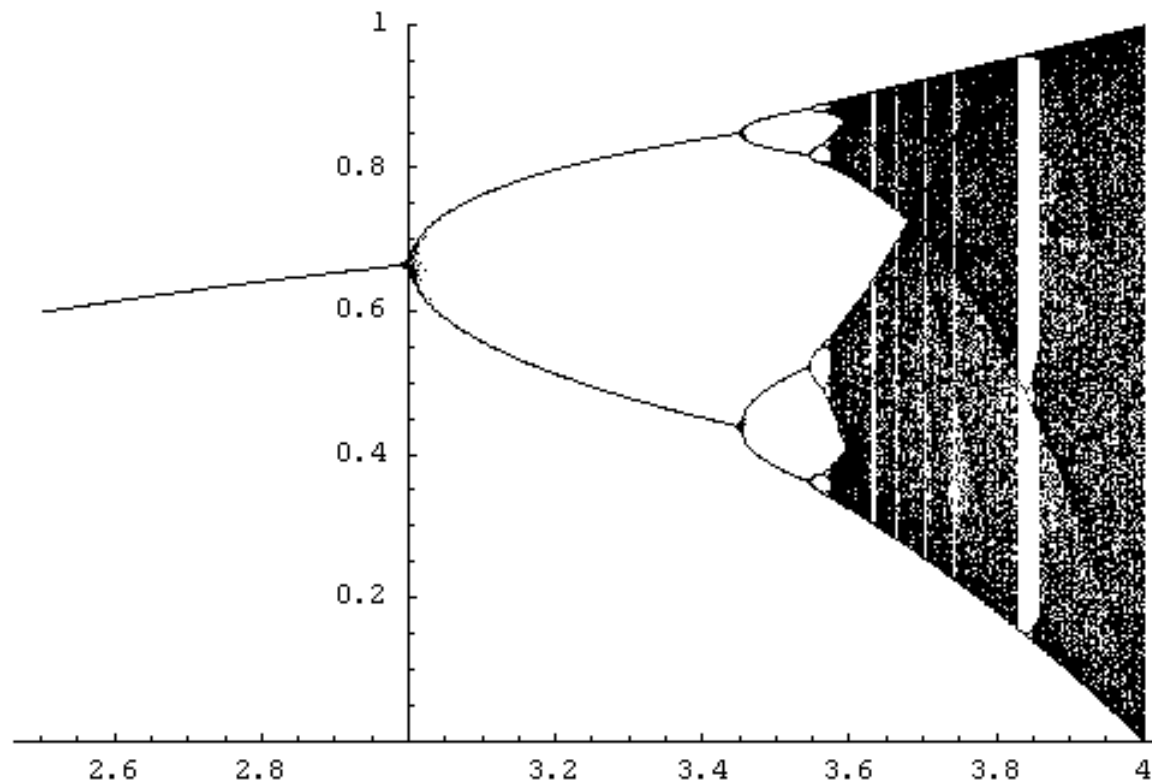


- W obszarze chaotycznym ($r = 3.7$)



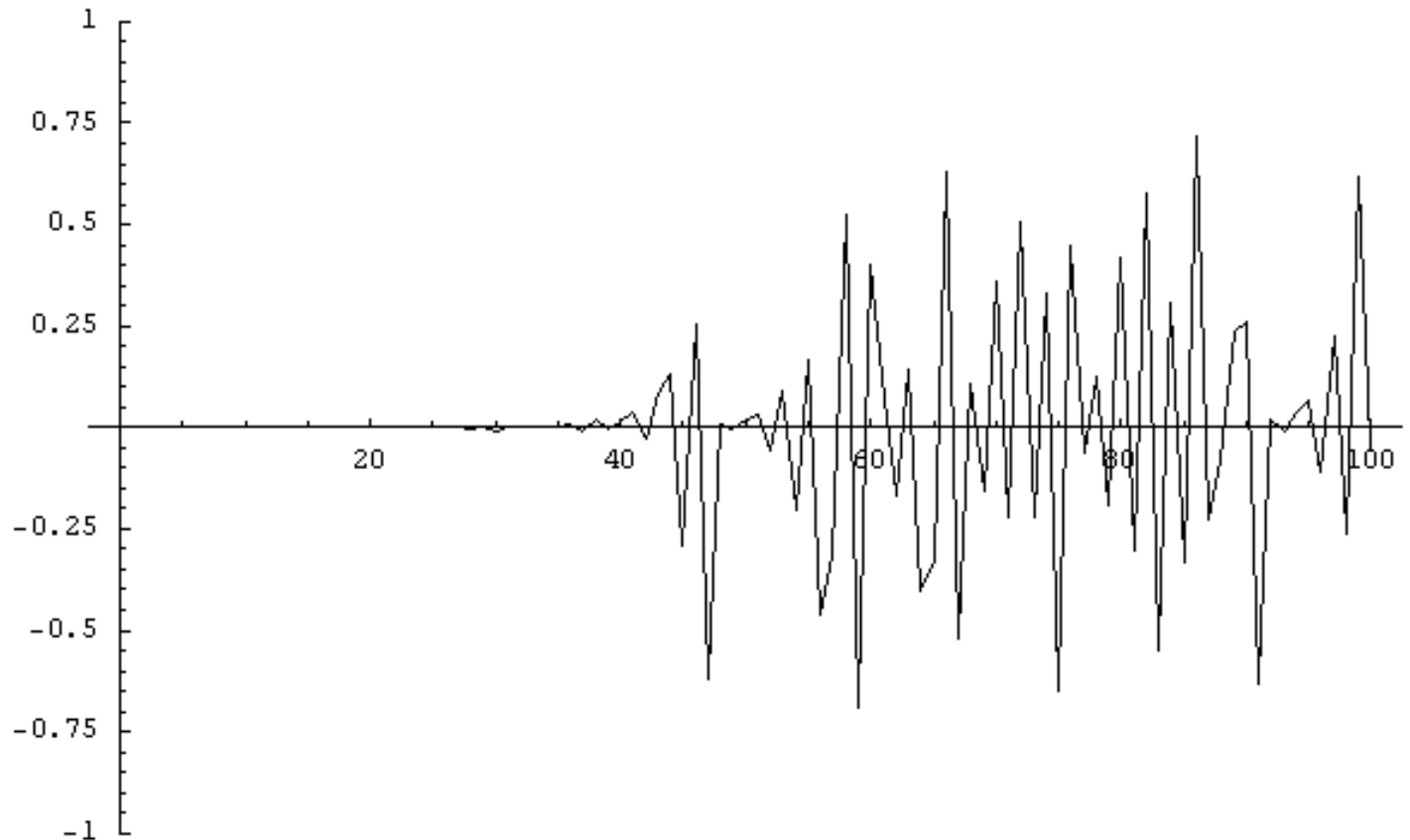
Wykres bifurkacyjny

- Dla funkcji logistycznej



Chaos deterministyczny

- Czująca zależność od warunków początkowych:
Rysunek pokazuje różnicę między historią
dwóch populacji różniących się początkowo o
0.0000001



Iteracje płaszczyzny

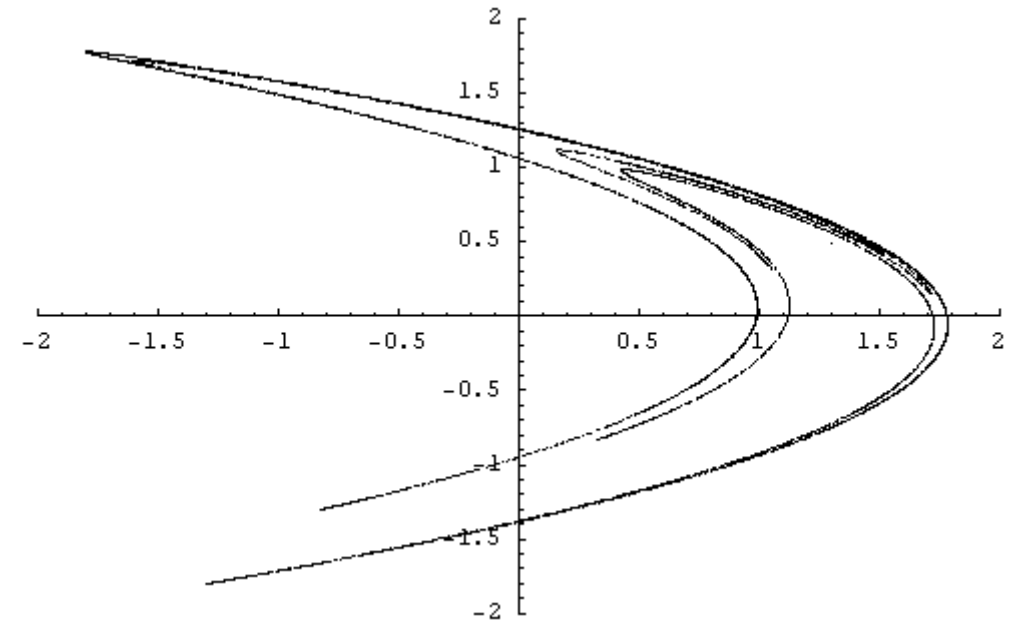
- Przykład dwuwymiarowy: mapa Henona

$$x_{n+1} = A - x_n^2 + B y_n$$

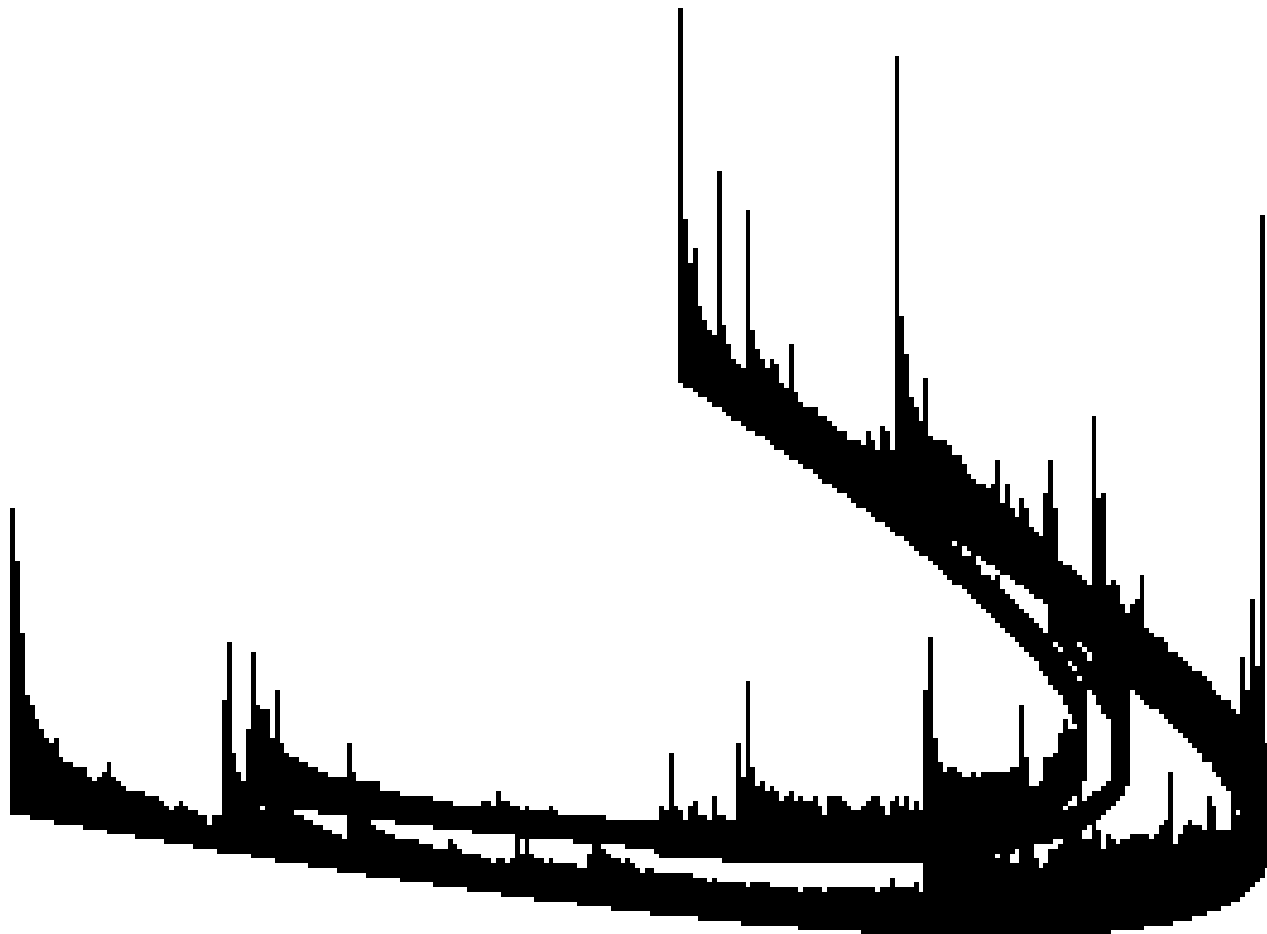
$$y_{n+1} = x_n$$

Dziwny atraktor

Dla pewnych wartości parametrów A i B , mapa Henona dąży do atraktora, który jest fraktalem. Taki atraktor nazywamy **dziwnym**.



Prawdopodobieństwo odwiedzin obszarów na atraktorze



Typowe atraktory

- Punkty stałe
- Cykle okresowe
- Dziwne atraktory (fraktale)

Układy z ciągłym czasem

- Większość interesujących układów zmienia się w czasie w sposób ciągły. Modelujemy to za pomocą **równań różniczkowych**. Równania te określają szybkość zmian parametrów układu w funkcji tych parametrów. Na przykład szybkość zmian położenia joja jest funkcją jego prędkości, położenia, oraz przyłożonej siły (ruch ręką).
- Aby w układach z ciągłym czasem pojawił się chaos, potrzebne są **co najmniej 3 zmienne**.

Przykład: równania Lorenza

- Uproszczony model konwekcji w atmosferze:

$$x_{n+1} = x_n + 10(y_n - x_n)\epsilon$$

$$y_{n+1} = y_n + (28x_n - y_n - x_n z_n)\epsilon$$

$$z_{n+1} = z_n + \left(-\frac{8}{3}z_n + x_n y_n \right) \epsilon$$

- ϵ to mała liczba określająca precyzję czasową zmian stanu układu

Literatura

- „*Czy Bóg gra w kości*” Ian Stewart
- „*Chaos*” James Gleick
- „*Granice chaosu. Fraktale*”
Peitgen, Jürgens, Saupe
- „*Fraktale*” Piotr Pierański
- „*Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*”
Baker, Gollub
- „*Chaos w układach dynamicznych*” Ed Ott
- „*Understanding nonlinear dynamics*”
Kaplan, Glass