# MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

**Daniel Wójcik**

Instytut Biologii Doświadczalnej PAN
Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

d.wojcik@nencki.gov.pl
dwojcik@swps.edu.pl

tel. 022 5892 424

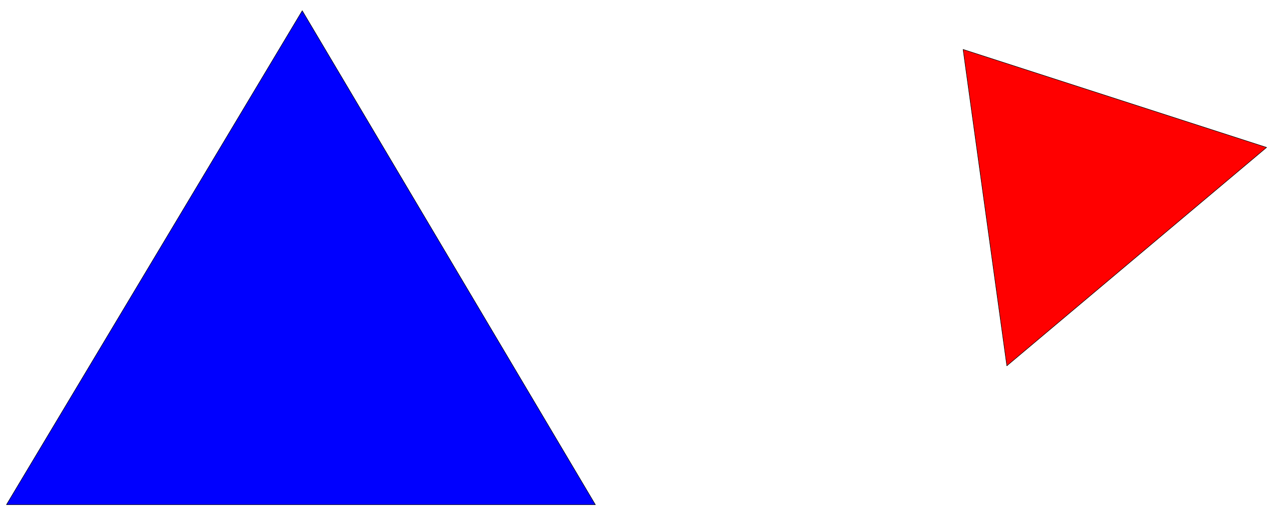
http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

# Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula
Iwona Białynicka-Birula

# Podobieństwo

- Dwie figury są **podobne**, jeżeli jedną można otrzymać z drugiej przez złożenie przesunięcia, ściskania i obrotu

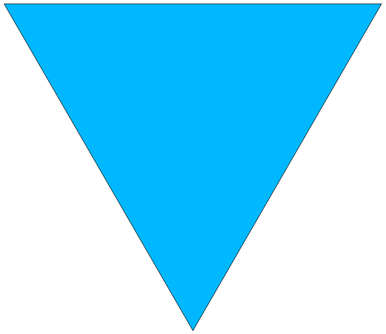


# Samopodobieństwo

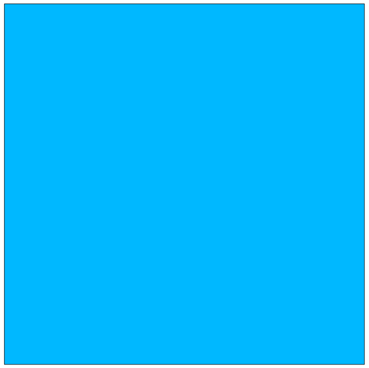
- Figura jest **samopodobna**, jeżeli można ją podzielić na części podobne do całości

- Przykłady:

Trójkąt



Kwadrat



Odcinek

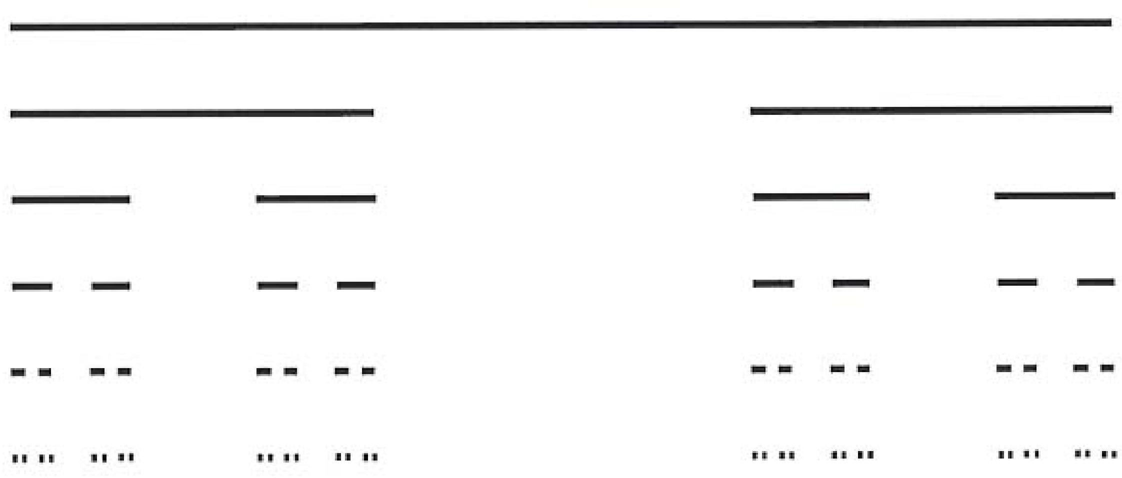
# Fraktale

- **Fraktal**: zbiór samopodobny
  o „niecałkowitym wymiarze”;
  ma złożoną strukturę w każdej skali

- Przykłady fraktali to:
  - Zbiór Cantora
  - Krzywa Kocha
  - Trójkąt Sierpińskiego

# Przykład: zbiór Cantora

- Wycinamy środkową jedną trzecią danego odcinka
- Stosujemy tą procedurę do każdej otrzymanej części
- Po nieskończenie wielu powtórzeniach otrzymamy zbiór Cantora

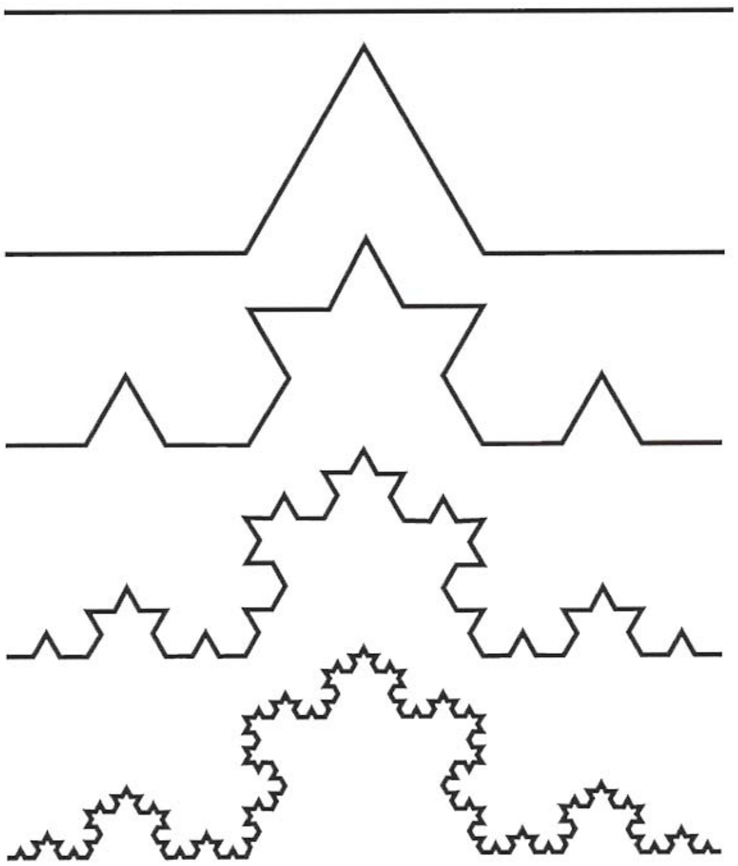


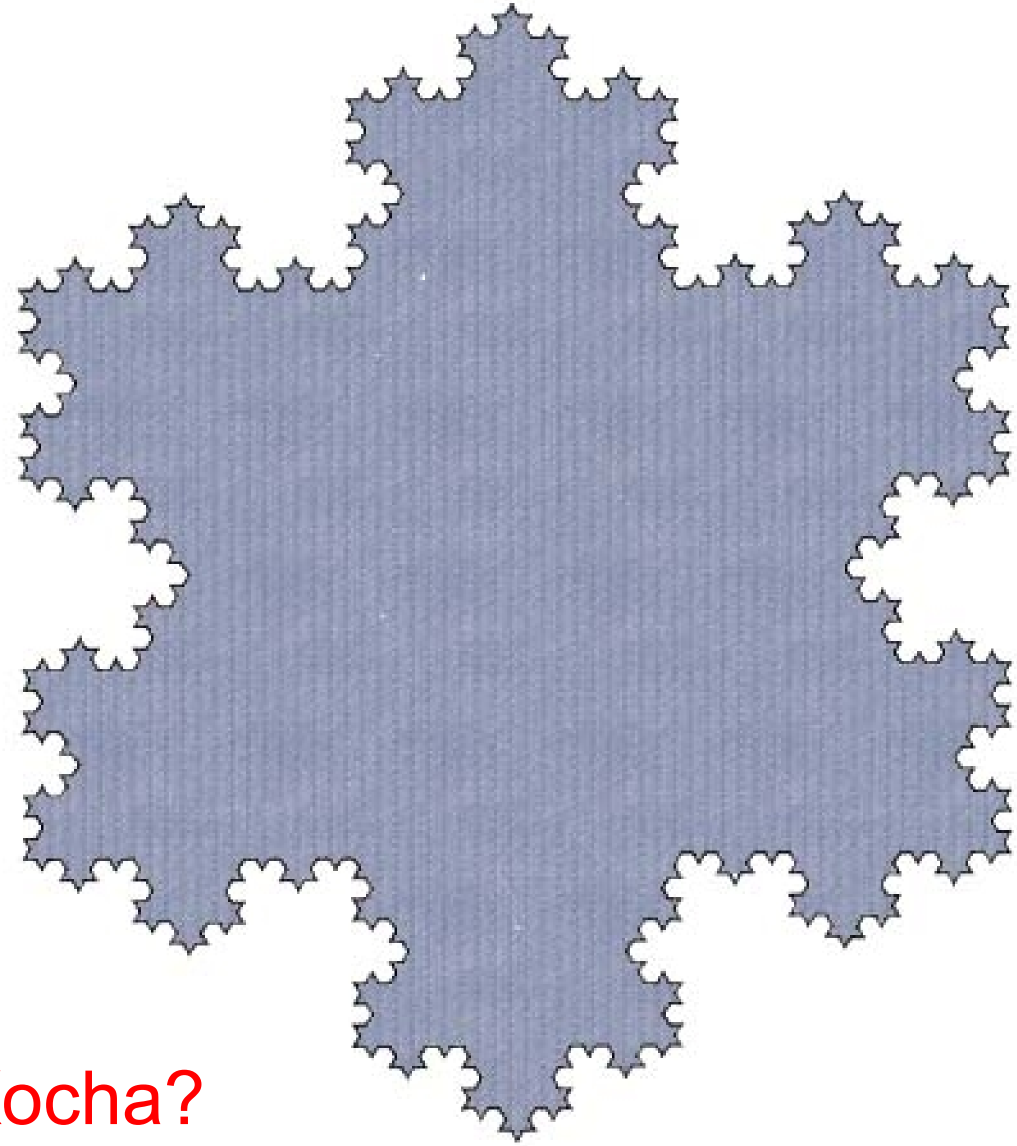
# Własności zbioru Cantora

- Jak długi jest zbiór Cantora?
- Ile punktów ma zbiór Cantora?

Program **Cantor**

# Przykład: krzywa i płatek Kocha





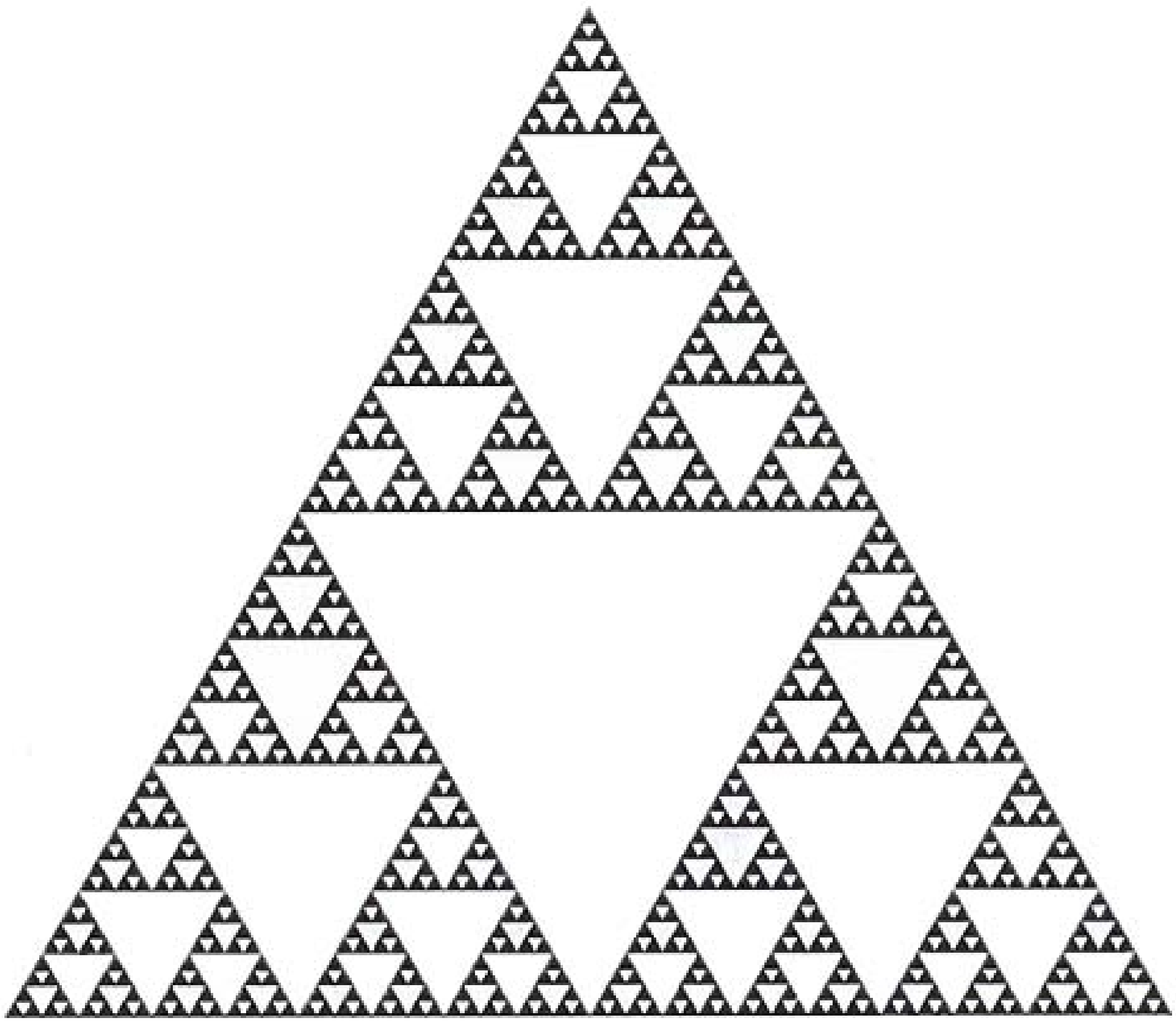
Jaka jest długość krzywej Kocha?
Jaka jest powierzchnia płatka Kocha?

# Definicja rekursywna

- Definicja rekursywna:
  Definicja, która zawiera definiowany obiekt

- Przykłady:
  - N!
  - fraktale

# Przykład: trójkąt Sierpińskiego



# Konstrukcja trójkąta Sierpińskiego

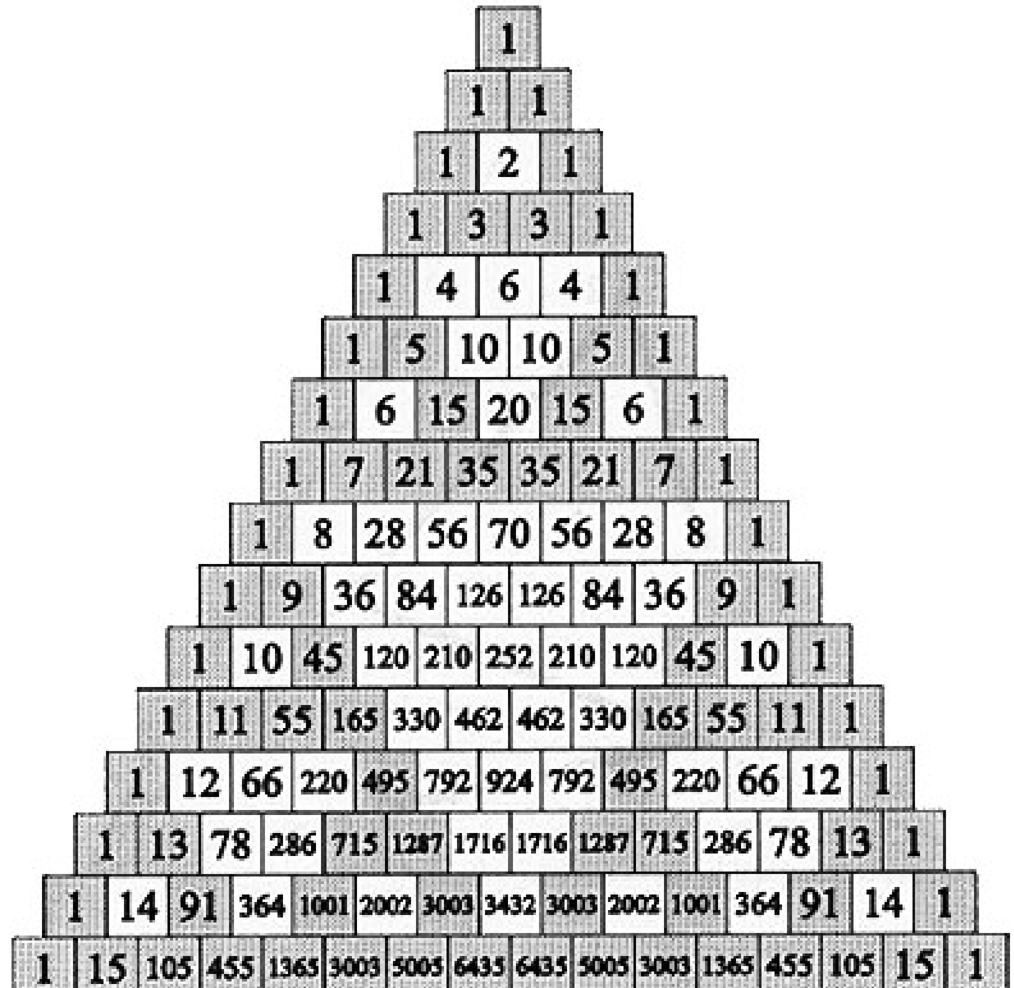
- Metoda 1: wycinamy coraz to mniejsze trójkąty ze zbioru początkowego

- Metoda 2: używamy dostępnej struktury w kroku N do konstrukcji kroku N+1 po czym skalujemy

# Trójkąt Sierpińskiego z trójkąta Pascala

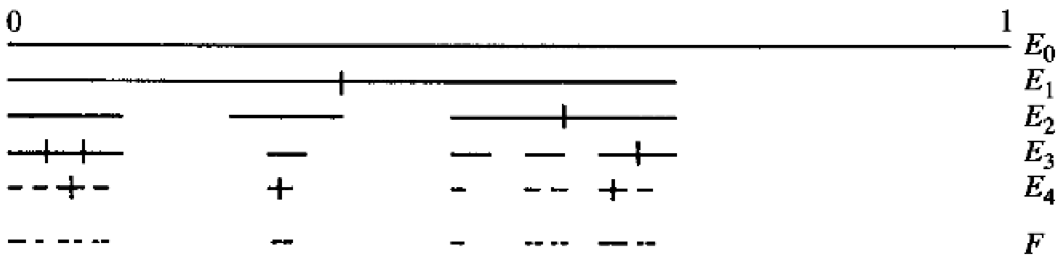
Nieparzyste liczby w trójkącie Pascala tworzą trójkąt Sierpińskiego...

Stąd też bierze się automat komórkowy generujący ten fraktal

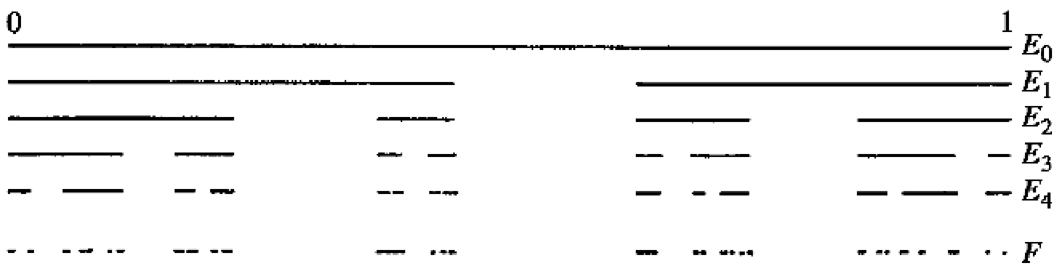


# Fraktale losowe

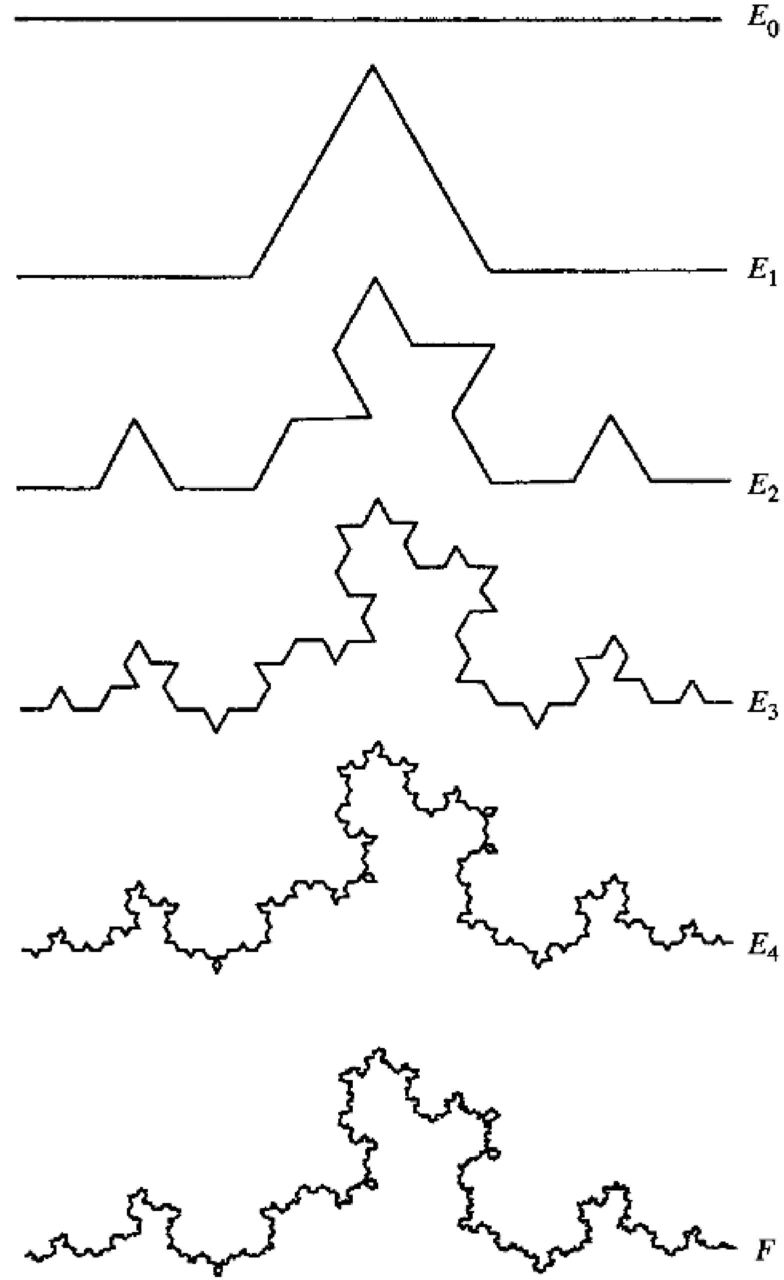
- Losowe zbiory Cantora
- Losowe krzywe Kocha
- Większość fraktali spotykanych w przyrodzie



(a)

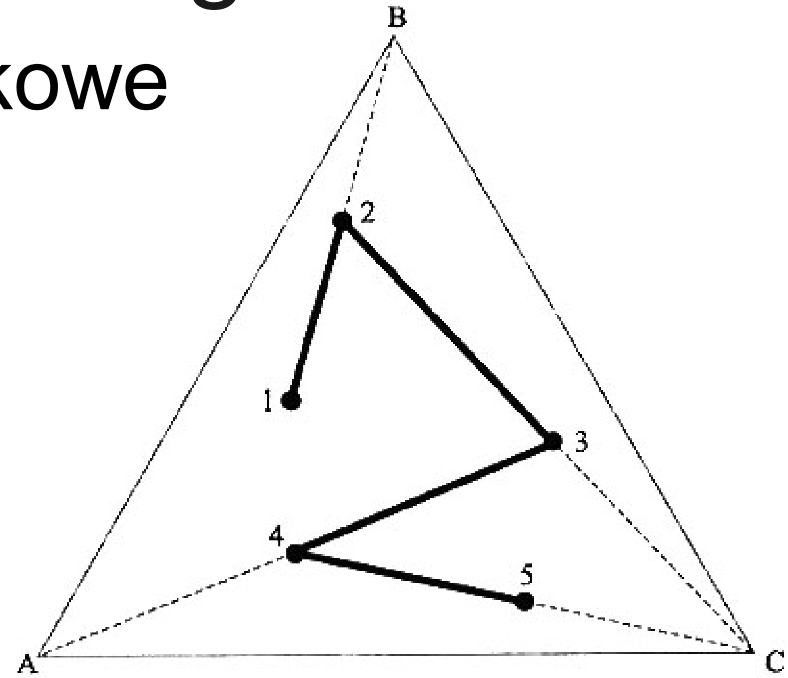


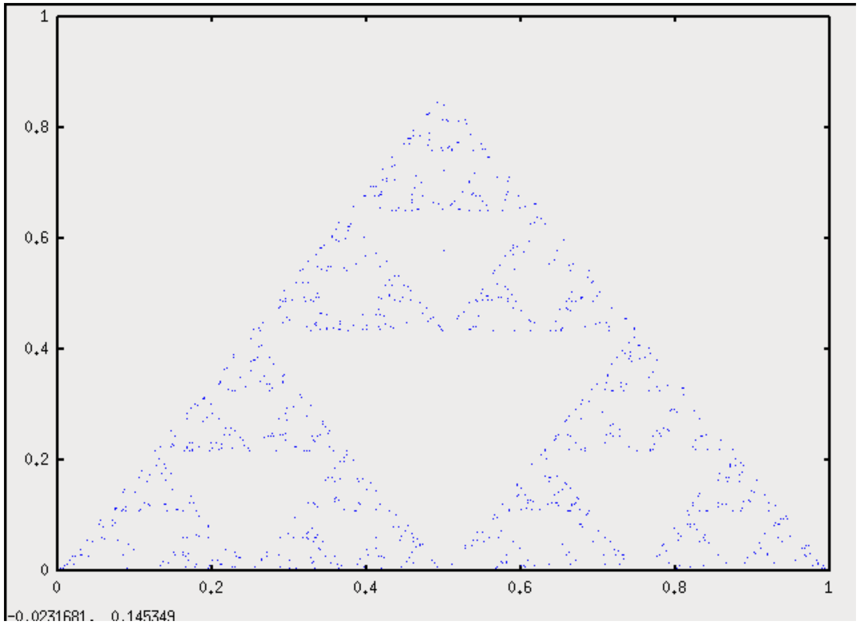
(b)

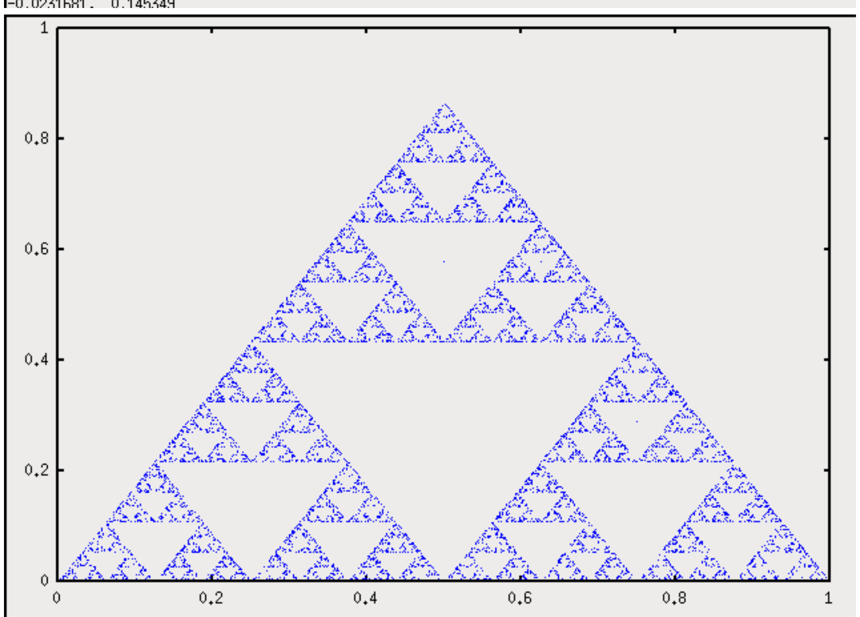


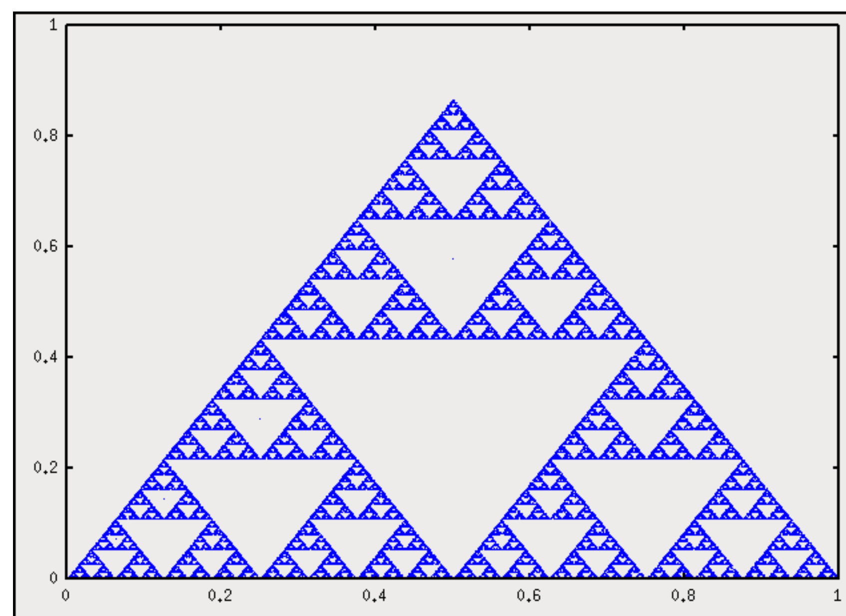
# Losowy trójkąt Sierpińskiego

## Błądzenie przypadkowe



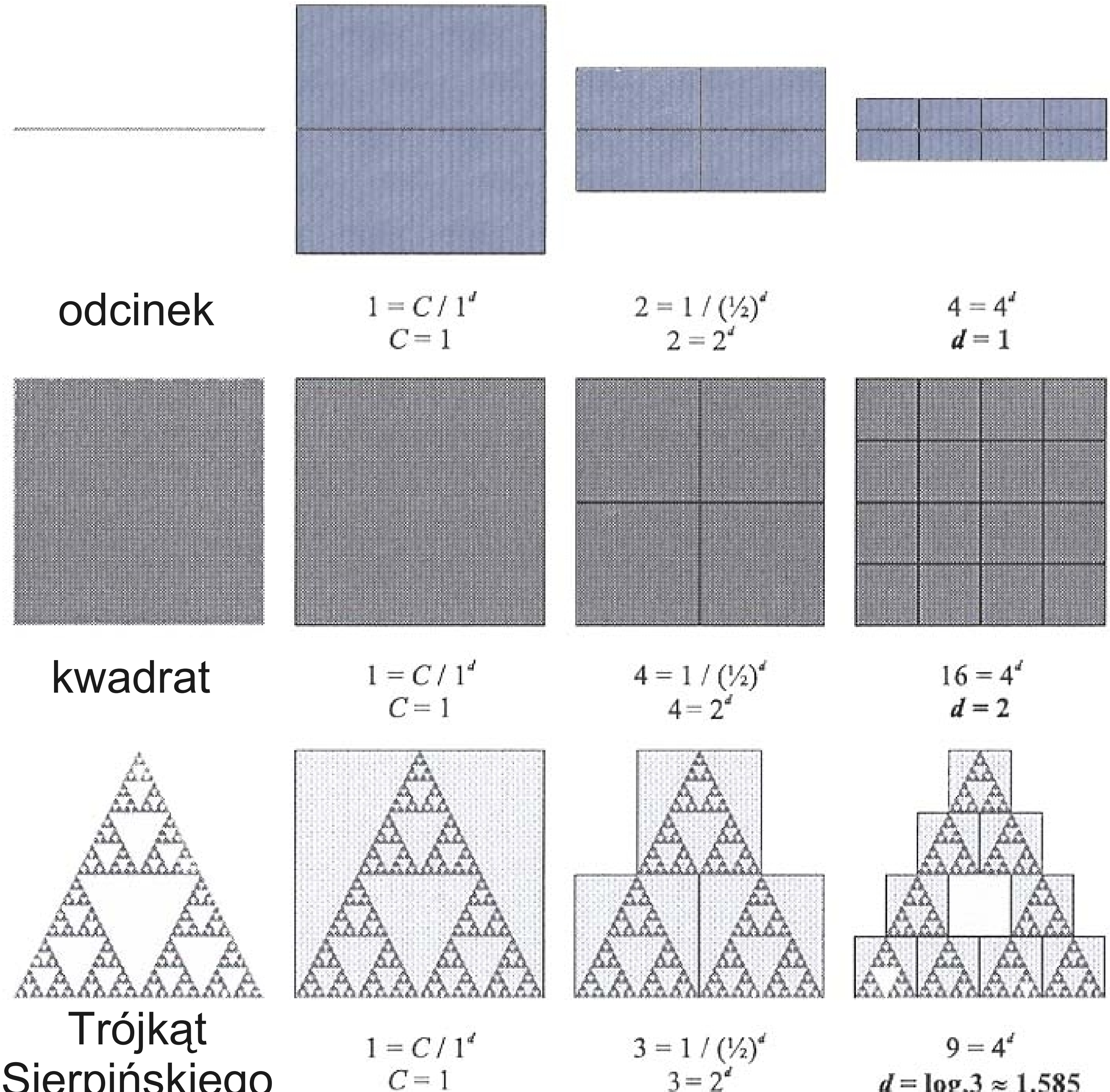
# Wymiar fraktalny

- Pokrywamy badany zbiór “pudełkami” o boku 1/n. Ile takich pudełek trzeba, żeby zakryć cały zbiór?
- Wymiar fraktalny opisuje skalowanie masy układu przy zmianie skali długości
- Wymiar prostych zbiorów zero-, jedno- i dwuwymiarowych; Porównanie z fraktalami

$$N(1/n) \approx C n^D$$

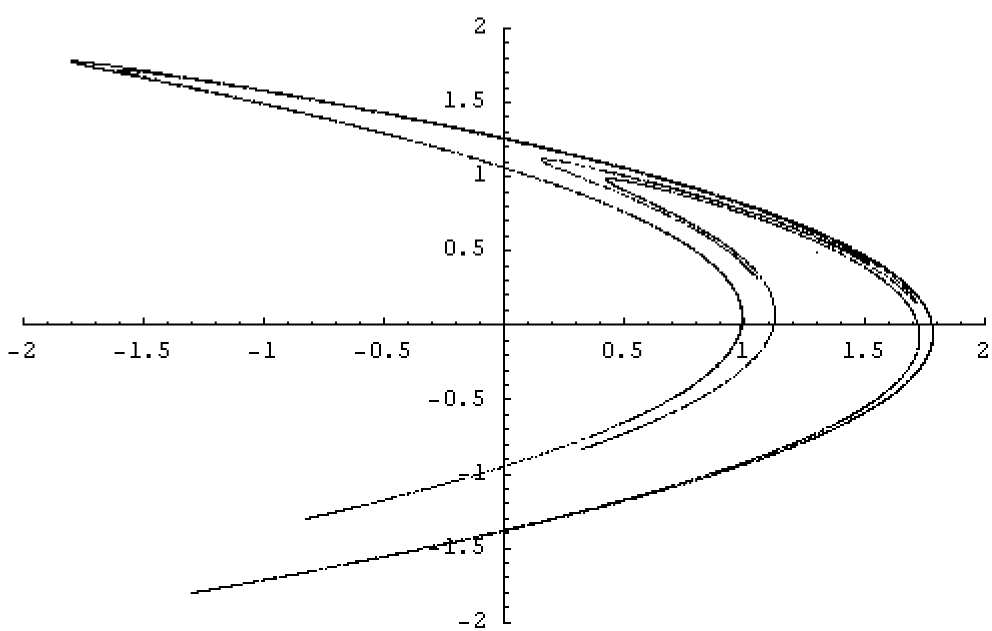
$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N(1/n)}{\ln n}$$

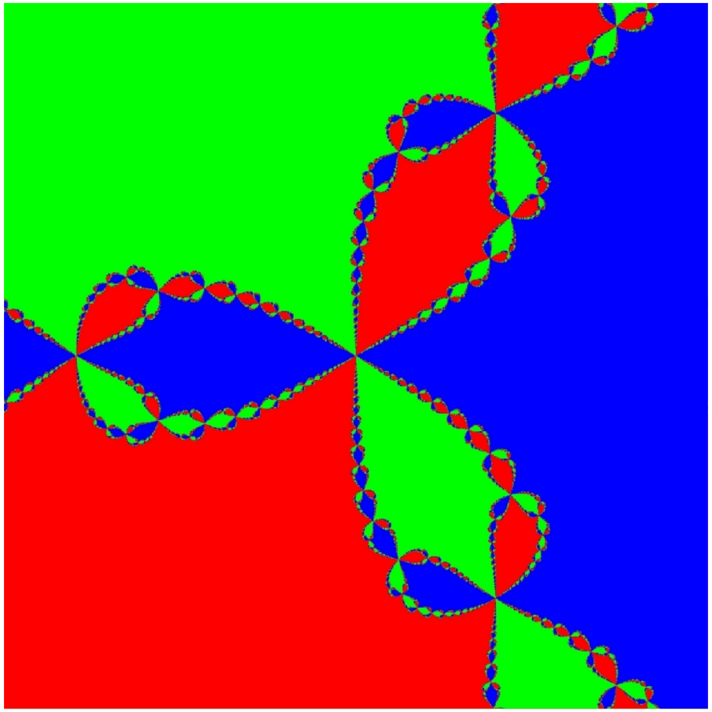
# Wymiar fraktalny



# Fraktale a układy dynamiczne

- Zbiory niezmiennicze (atraktory, np. atraktor Henona, atraktor Lorenza)
- Granice zbiorów przyciągania (np. brzegi basenów pierwiastków jedynki dla metody Newtona)



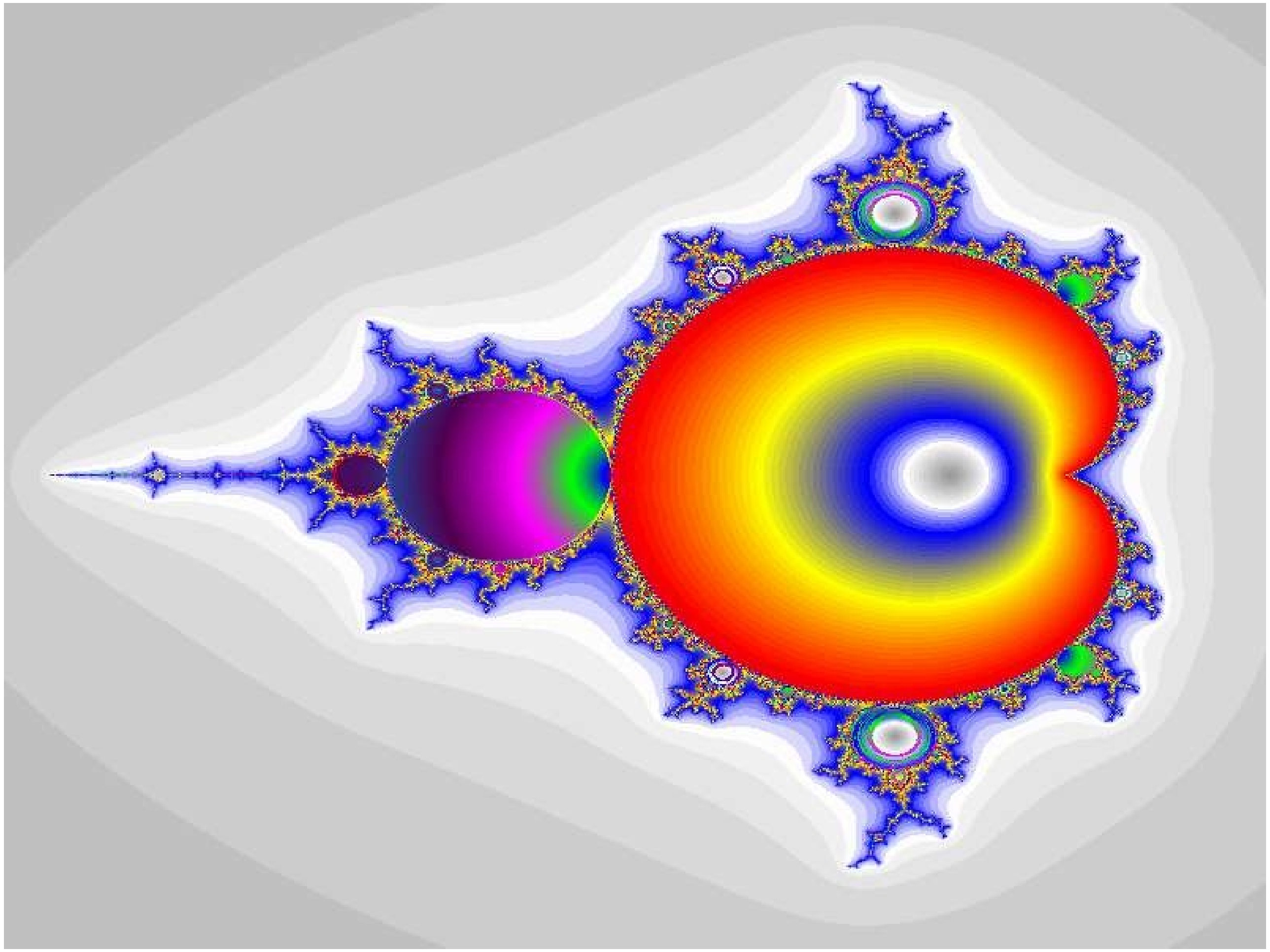
# Konstrukcja zbioru Mandelbrota

- Rozważmy odwzorowanie

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + x_0 \\
y_{n+1} &= 2\,x_n\,y_n + y_0
\end{aligned}
$$

- Kolejne iteracje (punkty)
  - Albo rosną nieograniczenie („uciekają do nieskończoności”),
  - Albo nie wychodzą poza koło o środku w (0,0) i promieniu 2.
- Zbiór punktów drugiego typu to **żuk Mandelbrota**

# Żuk Mandelbrota



# Fraktale

Chmury nie są kulami,
góry nie są stożkami
wybrzeża nie są okręgami
i ani kora nie jest gładka,
ani błyskawica nie mknie po linii prostej

B. Mandelbrot

# Fraktale w życiu

- Cechy krajobrazu mają charakter fraktalny (chmury, góry, brzegi, itd.)
- Kształty niektórych roślin (paproć, kalafior)
- Fraktalne kształty drzew dendrytycznych
- Kompresja fraktalna: Michael F. Barnsley pomysł: znaleźć transformację generującą wybrany aspekt obrazu

# Dziękuję za uwagę


„Superfractals”, M. F. Barnsley, http://www.superfractals.com/