Elementy matematyki dla psychologów i biologów

Daniel K. Wójcik

z wydatną pomocą Szymona Łęskiego

wersja z dnia 28 stycznia 2008

Instytut Biologii Doświadczalnej
Polskiej Akademii Nauk
im. Marcelego Nenckiego

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

Warszawa ∗ 2007/8

Część I
Wiadomości wstępne

Celem tych notatek jest zebranie w jednym miejscu materiału prezentowanego na wykładach i jego prezentacja w sposób strawny dla osób z niedużym przygotowaniem matematycznym. Naszym celem nie jest maksymalna precyzja, będziemy unikać dowodzenia większości podawanych tu faktów i twierdzeń starając się zastępować je obrazowymi przykładami.

W dużej mierze notatki te, przynajmniej we wczesnych fazach rozwoju, bazować będą na książkach W. Rudina "Podstawy analizy matematycznej", "Matematyka w Szkole średniej", P. Urbański "Notatki do wykładu z algebry dla fizyków".

1 Wprowadzenie

Tematyka:

2 Zbiory liczbowe

Liczby naturalne, całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone.

Liczby $\{1, 2, 3, \ldots\}$ nazywamy naturalnymi i oznaczamy symbolem $\mathbb{N}$. Świetnie się nadają do liczenia, a nawet pewnych zagadnień praktycznych.

Przykład 2.1: Jak zbudować piramidę z rogami w postaci kątów prostych? Trójkąt pitagorejski o bokach 3, 4, 5. Odmierzamy $3 + 4 + 5$ równych długości na sznurze i składamy w trójkąt. Jeden kąt będzie prosty. Można też użyć np. cyrkla i linijki, prawda?

$\triangle$

To prowadzi do pytania jakie zestawy liczb naturalnych mają tę własność — jedno z pierwszych zagadnień teorii liczb. Inne zagadnienia? Sito Erastotenesa?

Liczby naturalne możemy dodawać i mnożyć. Z odejmowaniem i dzieleniem trzeba uważać. Czy można odjąć więcej niż się ma? Akceptacja tego faktu ułatwiła handel pozwalając na tworzenie kredytów. Liczby $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ nazywamy całkowitymi. Możemy je już bez problemu dodawać, odejmować i mnożyć. Ale jak podzielić sprawiedliwie 10 jabłek na 3 dzieci? Mamy dwie opcje: albo każdemu dajemy po 3 i jedno zostawiamy, albo każde dostanie po 3 i $1/3$. W pierwszym przypadku mówimy o dzieleniu z resztą, w drugim mamy zwykłe dzielenie, które jest niewykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Jeżeli zależy nam byśmy mogli opisywać takie podziały, zmuszeni jesteśmy rozszerzyć zbiór liczb tak, by się to dało wykonać. Ten rozszerzony zbiór, w którym już można mnożyć, dzielić, dodawać i odejmować nazywamy zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

Wróćmy do trójkąta prostokątnego. Jak pamiętamy, twierdzenie Pitagorasa mówi, że suma kwadratów długości boków przyprostokątnych równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej. Zapytajmy, jaka jest długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1?

$$1^2 + 1^2 = 2 = c^2$$

Takie c, które spełnia powyższe równanie, oznaczamy $\sqrt{2}$. Okazuje się, że takiej liczby nie da się zapisać w postaci ułamka p/q, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$.

Dowód Załóżmy, że istnieją takie liczby $p, q \in \mathbb{N}$, że

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Uzupełnić prosty dowód. $\square$

Odkrycie tego było szokiem dla Greków, z których wielu odmówiło akceptacji istnienia takich liczb na gruncie światopoglądowym. Wierzyli, że istnieją tylko liczby, które można otrzymać przez podział kilku całości na wiele równych części. Okazało się, że jest bardzo wiele ważnych liczb, które nie są wymierne. Na przykład stosunek długości obwodu koła do jego średnicy jest niezależny od tej średnicy i zawsze taki sam. Nazwali go π.

Badając te liczby odkryto, że zbiór liczb wymiernych jest dziurawy: liczby niewymierne leżą właśnie w dziurach między liczbami wymiernymi.

Przykład 2.2: $\sqrt{2}$

$\triangle$

Postanowiono te dziury zakleić, tak powstał zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Okazało się, że po załataniu dziur w zbiorze liczb wymiernych większość problemów technicznych z liczbami zniknęła. Ale nie wszystkie. Wiadomo, że równania liniowe $a \cdot x + b = 0$ o współczynnikach całkowitych (wymiernych) a, b można zawsze rozwiązać w dziedzinie liczb wymiernych. Ale z równaniami kwadratowymi już nie jest tak dobrze. Równanie $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ możemy rozwiązać tylko wtedy, jeżeli wyznacznik równania $\Delta = b^2 - 4ac$ jest nieujemny. Odkryto jednak, że jeżeli przyjmiemy, że $\sqrt{-1}$ istnieje, to wszystkie równania kwadratowe można rozwiązać. Co więcej, wszystkie równania wielomianowe postaci $a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n = 0$ można rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ i każde takie równanie stopnia n ma dokładnie n rozwiązań.

2.1 Liczby zespolone

No dobrze, ale co to znaczy uwierzyć w istnienie pierwiastka z -1? W jakim sensie taka "liczba" może istnieć i jak nią operować? Zacznijmy od operacji. Wprowadźmy symbol i o tej własności, że $i \cdot i = i^2 = -1$. Rozważmy teraz zbiór $\mathbb{C}$ wszystkich symboli postaci $a + i \cdot b$, gdzie liczby $a, b \in \mathbb{R}$. W tym zbiorze wprowadzamy podstawowe działania arytmetyczne $+, -, \cdot, /$ tak jak byśmy to robili dla dwumianów $a + b \cdot x$. Robimy to tak:

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \\
(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i \\
(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\
&= (a_1 \cdot a_2 - b.b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \\
(a_1 + b_1 i)/(a_2 + b_2 i) &=
\end{aligned}$$

[uzupełnić] Możemy też zamiast $a + bi$ pisać (a, b), bo przecież ważne są tylko współczynniki!

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\
(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 \cdot a_2 - b.b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)
\end{aligned}$$

itd.

Zadanie 2.1: MWSS I rozdz. 4, II rozdz. 19, III rozdz. 32

△

Z takimi parami liczb już się kiedyś spotkaliśmy. Oznaczamy tak punkty na płaszczyźnie a parę liczb nazywamy współrzędnymi kartezjańskimi punktu na płaszczyźnie. Możemy więc myśleć o zbiorze liczb zespolonych jako o zbiorze $\mathbb{R}^2$, czyli o płaszczyźnie, na którą rozszerzamy zwykłe działania znane ze zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Czy to nie zaskakujące, że w takim śmiesznym zbiorze możemy uprawiać arytmetykę?

Czas przejść do konkretów.

Definicja 2.1 *Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Wtedy $a \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać częścią rzeczywistą liczby z, a b jej częścią urojoną. Oznaczamy to przez $a = \mathrm{Re}(z) \equiv \Re(z)$, $b = \mathrm{Im}(z) \equiv \Im(z)$.*

Czyli każdą liczbę zespoloną z możemy zapisać jako $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i = \Re(z) + \Im(z)i$.

Własności działań na liczbach zespolonych ($z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$):

1. $a + 0i = a$, czyli liczby rzeczywiste są podzbiorem liczb zespolonych,
2. przemienność $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
3. łączność $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
4. rozdzielność mnożenia względem dodawania $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
5. $1 \cdot z = z$, $0 + z = z$
6. jeżeli $z = a + ib$ to $-z = -a - ib = -a + (-b)i$ (element odwrotny ze względu na dodawanie)
7. jeżeli $z = a + ib$ to
$$z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$
(element odwrotny ze względu na mnożenie)

Dowód ostatniego?

Definicja 2.2 *Liczbą sprzężoną do liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę $\bar{z} := a - bi$.*

Własności sprzężenia:

1. $\mathrm{Re}\bar{z} = \mathrm{Re}z$, $\mathrm{Im}\bar{z} = -\mathrm{Im}z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Dowody?

2.2 Liczby zespolone — punkty na płaszczyźnie

Wróćmy do interpretacji liczb zespolonych jako punktów na płaszczyźnie. Możemy też myśleć o nich jako o wektorach zaczepionych w początku układu współrzędnych. Wtedy dodawanie liczb zespolonych jest równoważne dodawaniu wektorów (reguła równoległoboku).

[Rysunek]

Liczb zespolone możemy interpretować jako punkty na płaszczyźnie. Możemy też myśleć o nich jako o wektorach zaczepionych w początku układu współrzędnych. Wtedy dodawanie liczb zespolonych jest równoważne dodawaniu wektorów (reguła równoległoboku).

Jaka jest interpretacja mnożenia liczb zespolonych?

Jak mierzymy kąt między dwoma prostymi? Miara łukowa — miarą kąta jest długość łuku okręgu o promieniu jednostkowym. Jednostką jest radian.

$$\pi = 180^\circ$$

Zamiast współrzędnych kartezjańskich (x, y) możemy też używać współrzędnych biegunowych (r, φ). r to odległość z od 0, a φ to kąt jaki wektor $(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$ tworzy z osią OX liczony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Związek między a, b a r, φ jest dany następującymi wzorami:

1. $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$
2. $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Definicja 2.3 *Modułem liczby $z = a + bi$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$. Jeżeli $z \neq 0$, to argumentem liczby z nazywamy liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą*

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

i oznaczamy ją $\arg(z)$.

Argument liczby zespolonej dany jest z dokładnością do wielokrotności kąta pełnego, czyli 2π. Wartość argumentu z przedziału $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ nazywamy argumentem głównym z i oznaczamy $\mathrm{Arg}(z)$.

Mamy więc dwa popularne rozkłady liczby zespolonej:

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Własności modułu i argumentu:

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $|\bar{z}| = |z|$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$
5. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

6. $\arg(\bar{z}) = -\arg z$

[Dowody?]

Fakt 2.4 (Wzór de Moivre'a) *Jeżeli* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *to* $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Fakt 2.5 (Nierówność trójkąta) *Dla dowolnych* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *zachodzi*

1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

2. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$

2.3 Pierwiastki z jedynki

Definicja 2.6 *Pierwiastkiem stopnia* n *z* $z \in \mathbb{C}$ *nazywamy taką liczbę* z*, że* $z^n = w$.

Ustalmy liczbę naturalną n. Szukamy liczb zespolonych z takich, że

$$z^n = 1\ .$$

Istnieje dokładnie n różnych liczb zespolonych z o tej własności. Są one położone na okręgu jednostkowym, gdyż

$$|z^n| = |z|^n = 1\ .$$

Ich argumenty $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ muszą spełniać

$$n\varphi_k = 0$$

(z dokładnością do wielokrotności 2π).

Twierdzenie 2.7 *Dla każdej niezerowej liczby zespolonej* z *istnieje dokładnie* n *pierwiastków* n*-go stopnia i są one dane wzorem*

$$w_k := \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$\sqrt[n]{|z|}$ *jest zwykłym pierwiastkiem rzeczywistym z modułu* z*, a* $\varphi = \arg(z)$.

Przykład 2.3: $\sqrt{i}$

Przykład 2.4: $\sqrt[3]{1}$

△

Część II
Elementy analizy matematycznej, część 1

3 Funkcje jednej zmiennej

Własności funkcji. Elementarne – translacje, obroty. Grupa?

Załóżmy, że mamy dwa zbiory: A i B. Przypiszmy teraz każdemu elementowi zbioru A pewien element zbioru B:

$$A \ni a \mapsto b \in B \ .$$

Takie przyporządkowanie nazywamy *odwzorowaniem* lub *funkcją* i piszemy

$$f : A \to B \ , \qquad f(a) = b \ .$$

Nazwy „funkcja" używa się zwykle, gdy A i B to zbiory liczb.

Funkcja to jedno z najbardziej podstawowych pojęć w matematyce. [*]

Dziedzina funkcji: zbiór A.

3.1 Wykresy funkcji

Wykres funkcji to zbiór punktów na płaszczyźnie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in A\}$$

3.2 Podstawowe własności funkcji

Monotoniczność 1) funkcja (ściśle) rosnąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2) funkcja (ściśle) malejąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja jest okresowa z okresem T, jeśli

$$f(x) = f(x + T)$$

Funkcja parzysta, nieparzysta

$$f(x) = f(-x) \ , \qquad f(x) = -f(-x)$$

3.3 Przekształcenia wykresów

- Wykres funkcji $g(x) = f(x - a)$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w prawo.
- Wykres funkcji $g(x) = f(x) + a$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w górę.
- Wykres funkcji $g(x) = f(a \cdot x)$ jest zagęszczony a razy w stosunku do wykresu $f(x)$
- Wykres funkcji $g(x) = a \cdot f(x)$ jest przeskalowany a razy w stosunku do wykresu $f(x)$

3.4 Obraz, przeciwobraz

Niech

$$f : A \to B \ .$$

Obrazem funkcji f nazywamy zbiór tych elementów B, które są wartościami $f(x)$ dla pewnego $x \in A$. Zapisujemy to $f(A)$.

Przeciwobraz: niech C będzie podzbiorem B. Przeciwobraz C, oznaczany

$$f^{-1}(C) \ ,$$

to zbiór tych $x \in A$, dla których $f(x) \in C$.

Przykład: $sin^{-1}(\{0\})$.

Przykład 2: $f(x) = x^2 + 1$, $f^{-1}([2,3]) =?$, $f^{-1}([-1,0]) =?$

3.5 Bijekcja, surjekcja, iniekcja

- Surjekcja: funkcja $f : A \to B$ jest surjekcją, jeśli $f(A) = B$, to znaczy cały zbiór B jest obrazem. Mówimy też, że f jest *na* B.
  Czy $f(x) = sin(x)$ jest surjekcją?
- Iniekcja: funkcja różnowartościowa, to znaczy

  $$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

  Funkcja monotoniczna jest różnowartościowa.
- Bijekcja: to funkcja różnowartościowa i „na”, czyli surjekcja i iniekcja jednocześnie.

3.6 Funkcja odwrotna

Przykład. Niech $y = f(x) = 3 * x + 7$. Czy możemy obliczyć x znając y?

Tak, $x = \frac{y}{3} - \frac{7}{3}$. Jest to *funkcja odwrotna* do f.

Okazuje się, że funkcja odwrotna do f istnieje wtedy i tylko wtedy gdy f jest bijekcją.

Przykład. Niech f będzie określona na liczba dodatnich ($x \geqslant 0$) wzorem $f(x) = x^2 + 1$. Na jakim zbiorze można określić funkcję odwrotną?

Wykres funkcji odwrotnej.

3.7 Relacje

Jeśli funkcja f nie jest różnowartościowa, to nie istnieje funkcja odwrotna. Można jednak określić *relację* odwrotną.

Przykład: $f(x) = sin(x)$.

3.8 Równoliczność zbiorów

Czy między każdymi dwoma zbiorami istnieje bijekcja?

Nie, weźmy na przykład $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q\}$.

Widzimy, że aby istniała bijekcja między zbiorami skończonymi, muszą one mieć tyle samo elementów.

Jak jest w przypadku zbiorów nieskończonych? Na odwrót: tutaj mówimy, że mają one tyle samo elementów (są równoliczne), jeśli istnieje bijekcja.

3.9 Ile jest liczb parzystych?

Można zatem zapytać na przykład: czy liczb parzystych jest tyle samo co naturalnych?

Czy liczb całkowitych jest tyle samo co naturalnych?

Czy liczb wymiernych jest tyle samo co całkowitych?

Czy liczb rzeczywistych jest tyle samo co wymiernych?

4 Ciągi i szeregi liczbowe

Zbieżność. Rozdział 3 Rudin

4.1 Ciągi

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \ .$$

x_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Jeśli x_n są liczbami, mówimy o ciągu liczbowym.

Przykłady: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_1 = 1$, $x_n = 2 * x_{n-1}$.

4.2 Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \to \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Ścisła definicja: x jest granicą ciągu x_n, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \ .$$

Przykłady: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$.

4.3 Szeregi

Przykład. Spróbujmy obliczyć sumę wyrazów ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Możemy to zapisać jako ciąg: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\ldots$, który nazywamy szeregiem

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Szereg jest zbieżny, jeśli ciąg x_n jest zbieżny.

4.4 Szeregi (2)

Szereg z powyższego przykładu (geometryczny) jest zbieżny:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \ .$$

4.5 Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

Na przykład: czy $\sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

- Kryterium d'Alamberta: $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$
- Kryterium Raabego: $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

4.6 Zbieżność „względna" i „bezwzględna"

Co się dzieje, kiedy wyrazy szeregu są na przemian dodatnie i ujemne?

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

4.7 Liczby wymierne i niewymierne

Czy liczba niewymierna podniesiona do niewymiernej potęgi może dać liczbę wymierną?

4.8 Miary zbiorów nieskończonych

4.9 Ciągi

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \ .$$

x_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Jeśli x_n są liczbami, mówimy o ciągu liczbowym.

Przykłady: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_1 = 1, \ x_n = 2 * x_{n-1}$.

Przykładowe wykresy.

4.10 Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \to \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Ścisła definicja: x jest granicą ciągu x_n, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \ .$$

Przykład:

$$x_n = \frac{1}{n} \ , \qquad x_n \to 0$$

4.11 Często spotykane granice

- Ciąg stały jest zbieżny
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$
- Jeśli $|x| < 1$ to $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

4.12 Własności granicy

- Granica sumy ciągów jest sumą granic.
- Granica iloczynu to iloczyn granic (przykłady).
- Twierdzenie o trzech ciągach:

  Jeśli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ oraz ciągi a_n, c_n są zbieżne do wspólnej granicy g, to b_n również zbiega do g.

  Przykład:
  $$b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$$

4.13 Podciągi

Załóżmy, że mamy dany ciąg x_n. Wybierzmy teraz niektóre wyrazy tego ciągu, np.

$$x_3, x_8, x_9, x_{25}, x_{33}, \ldots$$

w taki sposób, że numery wyrazów są uporządkowane rosnąco. Otrzymujemy w ten sposób inny ciąg, który jest *podciągiem* ciągu x_n.

Jeśli ciąg jest zbieżny, to dowolny jego podciąg też jest zbieżny (do tej samej granicy).

A na odwrót?

4.14 Granica górna i dolna

Rozważmy następujący ciąg:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie jest zbieżny, ale ma podciągi zbieżne do 0 i do 1.

Mówimy, że 0 i 1 są *punktami skupienia* tego ciągu.

Z grubsza: największy punkt skupienia to granica górna, a najmniejszy to granica dolna ciągu.

4.15 Szeregi

Przykład. Spróbujmy obliczyć sumę wyrazów ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Możemy to zapisać jako ciąg: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, …, który nazywamy szeregiem

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Szereg jest zbieżny, jeśli ciąg x_n jest zbieżny.

Suma szeregu $\sum a_n$ to granica ciągu x_n.

Szereg z powyższego przykładu to szereg geometryczny. Jest on zbieżny:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \ .$$

W ogólności suma szeregu geometrycznego o wyrazach

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

dla $|q| < 1$ wynosi

$$\sum a_n = \frac{a_0}{1-q} \ .$$

4.16 Pewien ważny szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- zbieżny dla $p > 1$
- rozbieżny dla $p \leqslant 1$

4.17 Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

- Warunek konieczny: $\lim a_n = 0$. Nie jest to warunek wystarczający!

  Na przykład: czy $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?
- Kryterium porównawcze: jeśli $\sum c_n$ jest zbieżny oraz $|a_n| \leqslant c_n$, to $\sum a_n$ też jest zbieżny.
- Kryterium d'Alemberta: dla $a_n > 0$ jeśli $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ to $\sum a_n$ zbieżny.

4.18 Liczba e

Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Jest on zbieżny (jak to udowodnić?).

Sumę tego szeregu oznaczamy e. Jest to, podobnie jak π, ważna liczba.

Przybliżoną wartość $e \simeq 2,7183\ldots$ można szybko obliczyć z powyższego szeregu — wystarczy zsumować niewielką liczbę wyrazów.

Jeśli sumę n wyrazów oznaczymy s_n, to błąd można oszacować: $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$.

Tego oszacowania można użyć do dowodu niewymierności e.

4.19 Zbieżność „warunkowa" i „bezwzględna"

Co się dzieje, kiedy wyrazy szeregu są na różnych znaków, na przykład na przemian dodatnie i ujemne?

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny *bezwzględnie*, jeśli $\sum |a_n|$ jest zbieżny.

Jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny, a $\sum |a_n|$ nie — wtedy mówimy o zbieżności *warunkowej.*

Szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny warunkowo.

4.20 Zmiana kolejności sumowania

Jeśli szereg ma wyrazy dodatnie lub jest zbieżny bezwzględnie, wtedy można przestawiać wyrazy.

W innym przypadku (np. szeregów zbieżnych warunkowo) przestawianie lub grupowanie wyrazów może zmienić wynik!

Przykład:

$$\sum (-1)^n$$

5 Granica i ciągłość funkcji

Pojęcie granicy jest jednym z najważniejszych pojęć analizy. Wiele innych pojęć, takich jak pochodna czy całka, definiowanych jest jako granice pewnych specyficznych funkcji lub ciągów.

5.1 Granice jednostronne funkcji

Definicja 5.1 *Powiemy, że f ma granicę prawostronną q w punkcie $x = p$, jeżeli $f(x_n) \to q$ dla wszystkich ciągów $\{x_n\}$ dążących do p z prawej strony, to jest takich, że*

$$p < x_n \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = p.$$

Piszemy

$$f(p+) = q \qquad \text{albo} \qquad \lim_{x\to p+} f(x) = q$$

Analogicznie definiujemy granicę lewostronną.

[Ćwiczenie: Napisz definicję granicy lewostronnej].

5.2 Granice jednostronne funkcji

Zauważmy, że żeby granica prawostronna mogła istnieć, funkcja powinna być określona w dowolnym przedziale otwartym którego lewym końcem jest p. W samym punkcie p i na lewo od p funkcja nie musi być określona. Dla granicy lewostronnej mamy odwrotne relacje.

Inna definicja granicy prawostronnej:

Definicja 5.2 *Powiemy, że f ma granicę prawostronną q w punkcie $x = p$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że*

$$|f(x) - q| < \varepsilon \qquad \text{dla} \qquad p < x < p + \delta$$

5.3 Interpretacja geometryczna

5.4 Przykład na granice jednostronne 1

Rozważmy funkcję "część całkowita x"

$$f(x) \equiv [x] := \text{największa liczba całkowita } N \text{ spełniająca warunek } \; N \leqslant x.$$

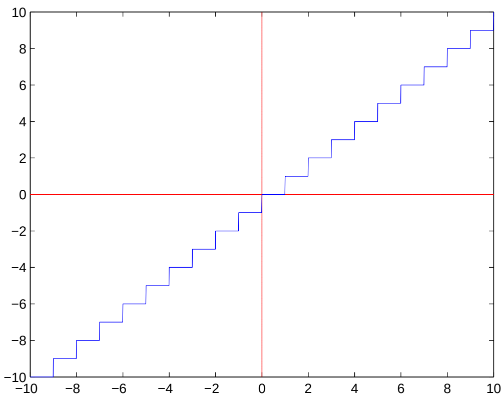
Na przykład $[7.3] = 7, [7] = 7, [-\pi] = -4, [-5] = -5$.

Wtedy

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5+} [x] &= 5, \\ \lim_{x \to 5-} [x] &= 4. \end{aligned}$$

Istotnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ jeżeli weźmiemy np. $\delta = 0.5$, to dla $5 < x < 5 + \delta$ zachodzi $|[x] - 5| = 0 < \varepsilon$.

Z kolei dla x takich, że $5 - \delta < x < 5$ zachodzi $|[x] - 4| = 0 < \varepsilon$.



Rysunek 1: $[x]$

5.5 Przykład na granice jednostronne 2

Rozważmy funkcję

$$N(t) := \text{liczba potencjałów czynnościowych w czasie } [0, t)$$

Jest to funkcja schodkowa ze skokami w czasach kolejnych iglic t_n.

5.6 Nieskończona granica jednostronna funkcji

Definicja 5.3 *Powiemy, że ∞ jest granicę prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x = p$, jeżeli dla każdej liczby M istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $f(x) > M$ jeżeli $p < x < p + \delta$. Piszemy wtedy*

$$f(p+) = \infty \qquad \textsf{albo} \qquad \lim_{x \to p+} f(x) = \infty$$

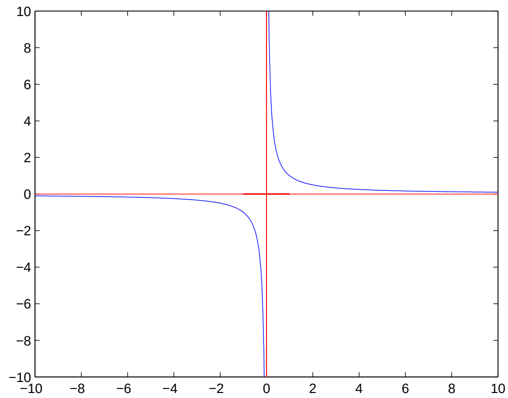
Analogicznie definiujemy granicę lewostronną i $-\infty$ jako granicę prawo- i lewostronną.

5.7 Przykład na nieskończone granice jednostronne

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

```
x=-1:0.001:1;
y=-10:.01:10;
plot(x,1./x)
hold on
ylim([-10 10])
plot(0,y,'r')
plot(x,0,'r')
```



Funkcja ta nie jest zdefiniowana w $x = 0$, ale ma tam lewo- i prawostronne granice:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \to 0-} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

5.8 Granica funkcji

Definicja 5.4 *Powiemy, że* granicą funkcji $f(x)$ w punkcie p jest q, *co zapisujemy*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad \textsf{lub} \qquad f(x) \to q \ \textsf{dla}\ x \to p,$$

jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|f(x) - q| < \varepsilon$$

kiedy x spełnia

$$0 < |x - p| < \delta.$$

5.9 Granica funkcji — uwagi

Definicja 5.5 *Sąsiedztwo punktu p to zbiór $(p-\varepsilon, p) \cup (p, p+\varepsilon)$ dla pewnego ε. Innymi słowy odcinek $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ bez punktu p.*

Funkcja f musi być określona w pewnym sąsiedztwie punktu p ale nie musi być określona w samym punkcie p.

Przykład: funkcje

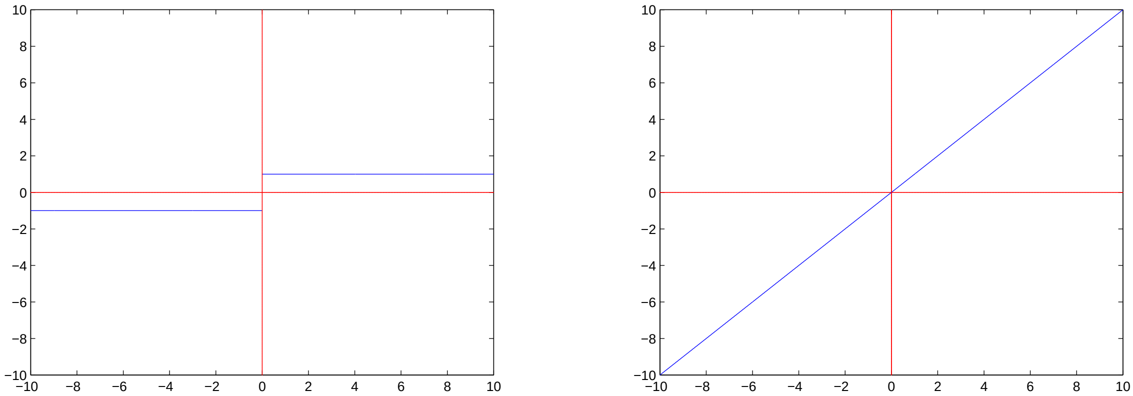
$$f(x) := \frac{|x|}{x}, \qquad g(x) := \frac{x^2}{x}$$

zdefiniowane dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jak wyglądają wykresy funkcji f, g?

Ile wynoszą granice funkcji f, g w $x = 1$? $x = -1$? $x = 0$?

[rysunki w Matlabie]



Rysunek 2: $|x|/x$, x^2/x

5.10 Granica funkcji — równoważna definicja

Twierdzenie 5.6

$$\lim_{x\to p} f(x) = q$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q$$

dla każdego ciągu $\{p_n\}$ takiego, że

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Fakt 5.7 *Jeśli f ma granicę w punkcie p to jest to jedyna granica. [Przykład: $|x|/x$]*

5.11 Granice dwóch funkcji

Twierdzenie 5.8 *Jeżeli funkcje f i g są określone na tym samym zbiorze E, $p \in E$ oraz*

$$\lim_{x \to p} f(x) = a, \qquad \lim_{x \to p} g(x) = b$$

to

1. $\lim_{x \to p}(f \pm g)(x) = a \pm b$
2. $\lim_{x \to p}(f \cdot g)(x) = a \cdot b$
3. $\lim_{x \to p}(f/g)(x) = a/b$, *jeżeli* $b \neq 0$

5.12 Ciągłość funkcji

Definicja 5.9 *Powiemy, że f jest ciągła w punkcie p, jeżeli istnieje granica $\lim_{x \to p} f(x)$ i jest ona równa $f(p)$.*

Jeżeli f jest ciągła w każdym punkcie zbioru X to mówimy, że f jest ciągła na X.

5.13 Ciągłość funkcji — wnioski

1. Jeżeli $p \in X$ jest punktem skupienia X, to f jest ciągła w p wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$
2. Jeżeli $p \in X$ nie jest punktem skupienia X, to f jest ciągła w p.

Przykłady

5.14 Funkcja ciągła funkcji ciągłej jest ciągła

Twierdzenie 5.10 *Niech f odwzorowuje $E \subset X$ w Y, a g odwzorowuje $f(E) \subset Y$ w Z. Określmy h odwzorowujące E w Z jako*

$$h(x) := g(f(x)), \qquad (x \in E)$$

Jeżeli f jest ciągła w punkcie $p \in E$, a g jest ciągła w punkcie $f(p)$, to h jest ciągła w punkcie p.

Przykłady: Weźmy $f(x) = x + 2$ i $g(x) = x^2$, obie ciągłe na $\mathbb{R}$. Wtedy $h(x) := g(f(x)) = (x + 2)^2$ jest również ciągła na $\mathbb{R}$. Także funkcja $f(g(x)) = x^2 + 2$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

5.15 Ważne funkcje ciągłe

5.16 Rodzaje nieciągłości

Jeżeli funkcja f jest określona w x i nie jest tam ciągła, to mówimy, że f jest *nieciągła* w x i x jest punktem nieciągłości f.

Dla dowolnego punktu przedziału (a, b) granica istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x+) = f(x-) = \lim_{x \to p} f(x)$.

Definicja 5.11 *Jeżeli funkcja f określona na (a,b) jest nieciągła w punkcie p a granice $f(x\pm)$ istnieją, to mówimy, że f ma w p nieciągłość prostą albo nieciągłość pierwszego rodzaju. Jeżeli f jest nieciągła w p a granice jednostronne nie istnieją, to f ma nieciągłość drugiego rodzaju w p.*

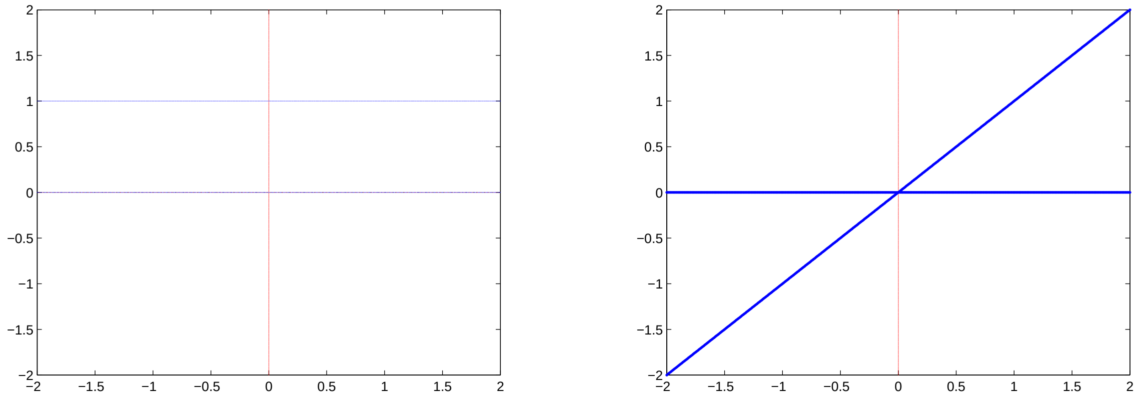
Możliwe są dwie odmiany nieciągłości pierwszego rodzaju: albo $f(x+) \neq f(x-)$, albo $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

5.17 Przykłady nieciągłości 1

Weźmy

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernego} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernego} \end{cases}$$

Wówczas f ma nieciągłości drugiego rodzaju we wszystkich punktach x, ponieważ ani $f(x+)$ ani $f(x-)$ nie istnieją.



Rysunek 3: x^2/x, Funkcja ciągła tylko w 0

5.18 Przykłady nieciągłości 2

Weźmy

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \text{ wymiernego} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernego} \end{cases}$$

Wówczas f jest ciągła w $x = 0$ [dowód?] i ma nieciągłości drugiego rodzaju w pozostałych punktach.

5.19 Przykłady nieciągłości 3

Weźmy

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } -3 < x < -2 \\ -x-2 & \text{dla } -2 \leqslant x < 0 \\ x+2 & \text{dla } 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Wówczas f ma nieciągłość prostą w $x = 0$ i jest ciągła w pozostałych punktach przedziału $(-3,1)$.

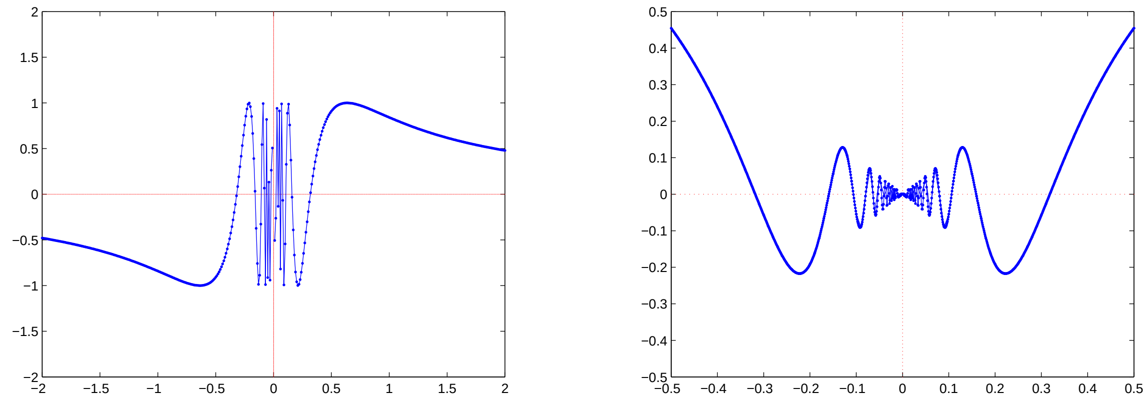
[Rysunek!]

5.20 Przykłady nieciągłości 4

Weźmy

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wtedy ani $f(0+)$ ani $f(0-)$ nie istnieją, a funkcja f ma nieciągłość drugiego rodzaju w punkcie $x = 0$. W każdym innym punkcie $x \neq 0$ funkcja f jest ciągła.



Rysunek 4: Funkcja ciągła tylko poza $x = 0$, funkcja wszędzie ciągła

5.21 Przykłady nieciągłości 5

Weźmy

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wtedy funkcja f jest ciągła w każdym punkcie.

```
x=-1:0.001:1;
plot(x,x.*sin(1./x))
```

[Rysunek!]

5.22 Granice nieskończone i w nieskończoności

Definicja 5.12 *Mówimy, że* $\lim_{x\to\infty} f(x) = q$*, jeżeli dla każdego ciągu* $x_n \to \infty$ *zachodzi* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$*. Analogicznie dla* $-\infty$*.*

Granica funkcji (w nieskończoności lub w $x \in \mathbb{R}$) może być skończona lub nieskończona. Własności granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji są takie same jak dla granic skończonych, o ile odpowiednie symbole mają sens. Np.

$$\lim_{x\to\infty} x + x^2 = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty + \infty = \infty.$$

5.23 Granica funkcji w punkcie

Przypomnienie:

Definicja 5.13 *Powiemy, że* granicą funkcji $f(x)$ w punkcie p jest q*, co zapisujemy*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad \textsf{lub} \qquad f(x) \to q \textsf{ dla } x \to p,$$

jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że*

$$|f(x) - q| < \varepsilon$$

kiedy x *spełnia*

$$0 < |x - p| < \delta.$$

5.24 Granica funkcji — równoważna definicja

Przypomnienie:

Twierdzenie 5.14

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$$

dla każdego ciągu $\{p_n\}$ *takiego, że*

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

5.25 Ciągłość funkcji

Przypomnienie:

Definicja 5.15 *Powiemy, że* f *jest ciągła w punkcie* p*, jeżeli istnieje granica* $\lim_{x \to p} f(x)$ *i jest ona równa* $f(p)$*. Jeżeli* f *jest ciągła w każdym punkcie zbioru* X *to mówimy, że* f *jest ciągła na* X*.*

5.26 Przykłady funkcji ciągłych

Następujące funkcje są ciągłe:

- funkcja stała $f(x) = c$
- funkcje wielomianowe, np.: $f(x) = 3x + 7$, $f(x) = 5x^3 + x^2 + 2$
- funkcje wymierne, to znaczy ilorazy wielomianów, np.: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$
- funkcje trygonometryczne (sin, cos itd.)
- funkcja logarytmiczna i wykładnicza

6 Różniczkowanie funkcji

Pochodne. Rozdział 5 Rudin

6.1 Definicja pochodnej w punkcie

Iloraz
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h. (h może być ujemne)

Definicja 6.1 *Załóżmy, że iloraz różnicowy ma granicę przy $h \to 0$. Wówczas granicę tę nazywamy* pochodną funkcji f w punkcie x_0 *i oznaczamy $f'(x_0)$:*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

6.2 Przykład 1

Dla przykładu obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$.

Iloraz różnicowy:
$$\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h$$
Zatem
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

6.3 Interpretacja geometryczna pochodnej

Przypomnienie: dla funkcji liniowej $ax + b$ współczynnik a nazywamy *współczynnikiem kierunkowym*. Jest on równy tangensowi kąta jaki tworzy ta prosta z osią x.

Iloraz różnicowy jest współczynnikiem kierunkowym *siecznej*.

W granicy $h \to 0$: pochodna funkcji w punkcie jest współczynnikiem kierunkowym *stycznej*.

[Rysunek, równanie stycznej do paraboli]

6.4 Przykład 2

Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie x_0. Iloraz różnicowy:

$$\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$$

Zatem
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

6.5 Przykład 3

Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie x_0. Iloraz różnicowy:

$$\frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{-1}{x_0(x_0+h)}$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

6.6 Interpretacja fizyczna pochodnej

Niech t będzie czasem, a funkcja $y = f(t)$ niech oznacza położenie pewnego punktu (np. samochodu) wzdłuż osi (np. odległość wzdłuż drogi). [Rysunek]

Wówczas iloraz różnicowy

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

to prędkość średnia. (Jak ją mierzyć?)

Pochodna f w punkcie t_0 to wówczas prędkość chwilowa (pokazywana przez szybkościomierz) w chwili t_0.

6.7 Różniczkowalność a ciągłość

Różniczkowalność: mówimy, że funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0, jeżeli w tym punkcie istnieje jej pochodna.

Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest też w tym punkcie ciągła:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Istnieją jednak funkcje ciągłe, które nie są różniczkowalne.

6.8 Różniczkowalność — przykład 1

Niech $f(x) = |x|$ [wykres]. Ta funkcja jest ciągła, ale w punkcie $x_0 = 0$ nie jest różniczkowalna.

Iloraz różnicowy:

$$\frac{|0+h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h} = \pm 1$$

Nie istnieje granica ilorazu różnicowego w $h = 0$ (chociaż istnieje granica lewostronna i granica prawostronna).

6.9 Pochodna jako funkcja

Do tej pory zajmowaliśmy się pochodną funkcji w jednym punkcie.

Teraz załóżmy, że mamy funkcje $f(x)$, która jest różniczkowalna w każdym punkcie. Możemy wówczas każdej wartości x przyporządkować wartość pochodnej f w tym punkcie:

$$x \mapsto f'(x)$$

Dostajemy w ten sposób nową funkcję, którą nazywamy pochodną funkcji f. Na przykład:

$$f(x) = x^2 \ , \qquad f'(x) = 2x \ .$$

6.10 Obliczanie pochodnej

Jak obliczać pochodną? Można korzystać z definicji, ale w praktyce korzystamy ze znanych pochodnych podstawowych funkcji oraz reguł ich łączenia.

Pochodne podstawowych funkcji:

Funkcja $f(x) = \ldots$	Pochodna $f'(x) = \ldots$
C	0
x^n, $n \geqslant 1$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

6.11 Obliczanie pochodnej (2)

Pochodna sumy (różnicy) funkcji:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Pochodna iloczynu funkcji:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

Pochodna ilorazu funkcji:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

6.12 Przykłady 1

$$y = x^2 + 3 \ , \qquad y' = 2x + 0 = 2x$$

$$y = 5x^4 \ , \qquad y' = 5(x^4)' = 20x^3$$

$$y = \frac{1}{x} \ , \qquad y' = \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{2x}{x+1} \ , \qquad y' = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y = \operatorname{tg} x \ , \qquad y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \ldots = \frac{1}{\cos^2 x}$$

6.13 Pochodna funkcji złożonej

Niech $F(x) = f(g(x))$, na przykład:

$$g(x) = 5x \ , \qquad f(x) = \cos(x) \ ,$$

$$F(x) = \cos(5x)$$

Wówczas $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$(\cos(5x))' = -\sin(5x) \cdot (5x)' = -5\sin(5x)$$

6.14 Przykład 2

Obliczymy pochodną funkcji $F(x) = \frac{1}{2x+5}$. Pierwszy sposób (pochodna ilorazu):

$$F'(x) = \frac{(1)'(2x+5) - 1 \cdot (2x+5)'}{(2x+5)^2} = \frac{-2}{(2x+5)^2}$$

Drugi sposób (pochodna funkcji złożonej)

$$F(x) = f(g(x)) \ , \quad g(x) = 2x + 5 \ , \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = \underbrace{\frac{-1}{(2x+5)^2}}_{f'(g(x))} \cdot (2x+5)' = \frac{-2}{(2x+5)^2}$$

6.15 Pochodna drugiego rzędu

Wiemy, że z funkcji $f(x)$ możemy uzyskać pochodną (funkcję) $f'(x)$. Czy możemy ten proces kontynuować? Tak, możemy obliczyć pochodną pochodnej:

$$(f'(x))' = f''(x)$$

czyli drugą pochodną (podobnie: trzecią, czwartą, ...). Pierwsza pochodna ma interpretację prędkości, a druga — przyspieszenia.

6.16 Przykład

Kulka poruszająca się na sprężynce.

Położenie:

$$y(t) = A\sin(t)$$

Prędkość:

$$y'(t) = A\cos(t)$$

Przyspieszenie:

$$y''(t) = -A\sin(t)$$

6.17 Notacja

Pochodną zapisuje się na różne sposoby:

$$f'(x)\ , \qquad f'\ , \qquad \dot{f}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\ , \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

Pochodne wyższych rzędów:

$$f''(x)\ , \qquad \ddot{f}(t)\ , \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

$$f^{(n)}(x)\ , \qquad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

6.18 Funkcje gładkie

Niektóre funkcje da się różniczkować „w nieskończoność”, to znaczy istnieją pochodne dowolnie wysokich rzędów. O takich funkcjach mówimy, że są gładkie.

Przykład funkcji gładkiej: $\sin(x)$.

Przykład funkcji różniczkowalnej, ale nie gładkiej:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}\ , \qquad f'(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases} = |x|$$

6.19 Różniczkowalność — przykład 2

Przykład patologiczny: istnieją funkcje ciągłe, których nie da się zróżniczkować *w żadnym punkcie*!

7 Całka Riemanna

(Riemanna-Stieltjesa). Rozdział 6 Rudin

7.1 Przykład — pole pod wykresem

7.2 Podziały odcinka

Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a, b]$, ograniczoną.

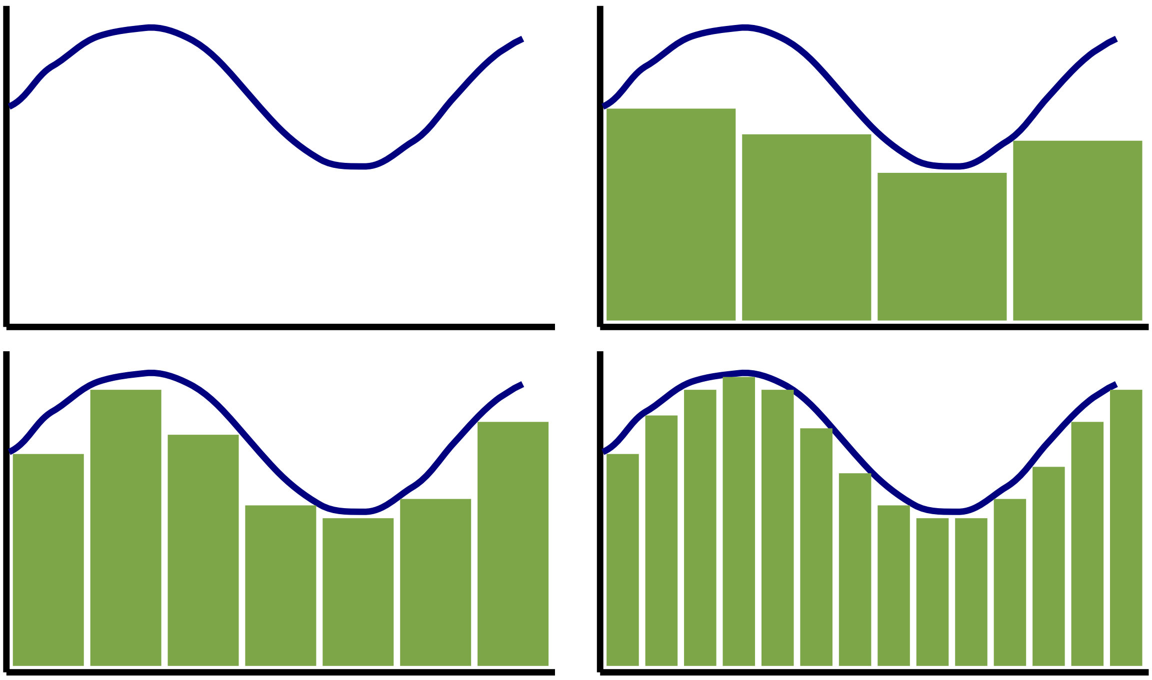
Przedział $[a, b]$ możemy dzielić na coraz to mniejsze przedziały:

7.3 Definicja całki

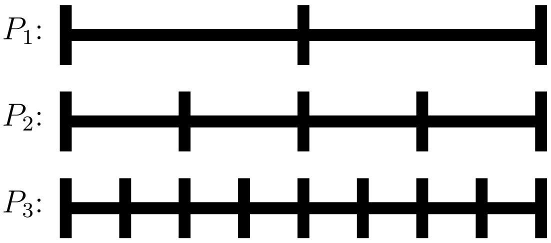
Skonstruujmy teraz ciąg podziałów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ na równe podprzedziały (o długości Δx_m). Załóżmy, że są to coraz drobniejsze podziały ($\Delta x_m \to 0$).

Każdemu podziałowi P_m przyporządkowujemy liczbę S_m przybliżającą (przy takim podziale) pole pod wykresem:

$$S_m = \sum_i f(c_i)\Delta x_m\ ,$$



Rysunek 5: Pole pod wykresem



gdzie c_i — punkt w i−tym podprzedziale. Jeśli ciąg S_m jest zbieżny do S (niezależnie od wyboru punktów c_i) to S nazywamy całką z $f(x)$ na przedziale $[a, b]$.

7.4 Definicja całki

Definicja:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \sum_i f(c_i)\Delta x_m$$

Jeśli powyższa granica istnieje, to nazywamy ją *całką z funkcji $f(x)$ w granicach od a do b*. Dla funkcji ciągłej i przedziału skończonego całka zawsze istnieje (funkcje ciągłe są całkowalne).

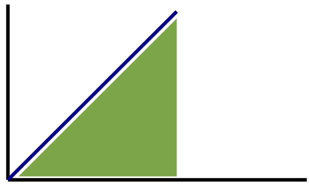
Zwykle w tym kontekście mówi się o „całce oznaczonej” (na danym przedziale), w odróżnieniu o „nieoznaczonej” (będzie później).

Całka to uogólnienie operacji dodawania. Znak całki to stylizowana litera S (od „summa”).

7.5 Przykład

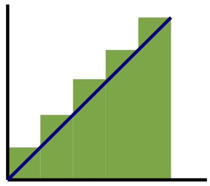
Obliczmy pole trójkąta, czyli

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x$$

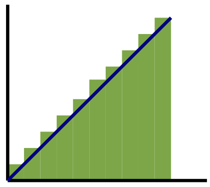


Wybieramy coraz drobniejsze podziały odcinka $[0,1]$ na podprzedziały. Niech P_n będzie podziałem na n równych części. Wtedy mamy:

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} \underbrace{\frac{i}{5}}_{f(c_i)} \underbrace{\frac{1}{5}}_{\Delta x_5} = \frac{60}{100}$$



$$S_{10} = \sum_{i=1}^{10} \underbrace{\frac{i}{10}}_{f(c_i)} \underbrace{\frac{1}{10}}_{\Delta x_{10}} = \frac{55}{100}$$



7.6 Przykład (c.d.)

Wzór ogólny:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n)$$

$$S_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

7.7 Własności całki oznaczonej

Rozszerzanie obszaru całkowania:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Wyciąganie czynnika stałego:

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Całka sumy

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$$

7.8 Zamiana granic całkowania

Przyjmuje się następującą umowę:

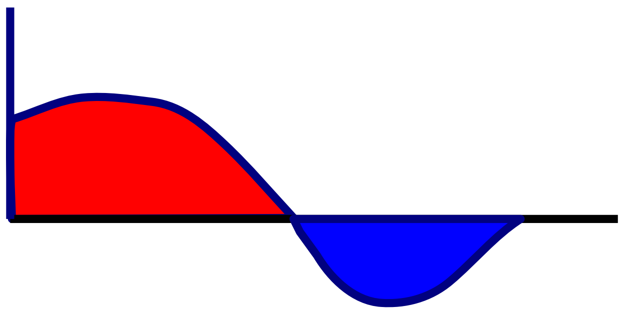
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Wówczas wzór na rozszerzanie obszaru całkowania obowiązuje zarówno dla $a < b < c$ jak i dla innych sytuacji, np.:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$$

7.9 Funkcje zmieniające znak

Co się dzieje, jeśli obliczamy całkę funkcji, która na pewnym przedziale jest dodatnia, a na innym ujemna?



Wówczas pole obszarów nad osią x bierzemy ze znakiem plus, a pole pod osią ze znakiem minus.

7.10 Przykład

Ile wynosi całka z funkcji sinus po pełnym okresie?

$$\int_0^{2\pi} \sin x = ?$$

Pola nad osią i pod osią są sobie równe, zatem

$$\int_0^{2\pi} \sin x = 0$$

7.11 Jakie funkcje można całkować?

Wiemy już, że funkcje ciągłe są całkowalne. Okazuje się jednak, że całkować można również niektóre funkcje nieciągłe:

jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła we wszystkich punktach przedziału $[a, b]$ z wyjątkiem skończonej liczby, to jest całkowalna.

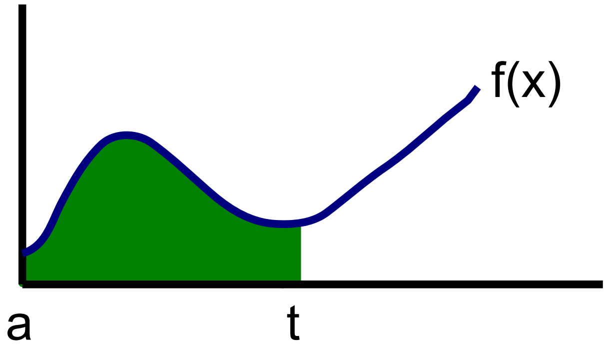
Jakie są zatem przykłady funkcji niecałkowalnych?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \qquad\quad \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

7.12 Podstawowe twierdzenie

Z powyższej, geometrycznej definicji całki nie widać, jak można obliczać całki bardziej skomplikowanych funkcji.

Okazuje się jednak, że obliczanie całek to operacja odwrotna do obliczania pochodnych:



$$F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = f(t)}$$

7.13 Funkcja pierwotna, całka nieoznaczona

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję $F(x)$, której pochodna jest równa $f(x)$, tzn.

$$F'(x) = f(x)\ .$$

Dwie funkcje, które mają równą pochodną, mogą się różnić co najwyżej o stałą, np.

$$(x^2)' = 2x\ , \qquad (x^2+5)' = 2x\ .$$

Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną $f(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

7.14 Całka nieoznaczona a oznaczona

Znając całkę nieoznaczoną funkcji $f(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

możemy obliczyć całkę oznaczoną:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Oznaczenie:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

7.15 Przykład

Przykłady całek nieoznaczonych:

$$\int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad \text{bo } \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C, \quad \text{bo } (\sin x)' = \cos x$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C, \quad \text{bo } (x)' = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \quad \text{bo } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

7.16 Przykład

Obliczanie całki oznaczonej — wróćmy do pola trójkąta:

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$

Spróbujmy obliczyć pole ograniczone osią x układu współrzędnych, prostymi $x = 1$, $x = 2$ i parabolą (wykresem funkcji $y = x^2$):

$$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

7.17 Przykład (c.d.)

Ile wynosi pole ograniczone wykresem funkcji sinus i osią x?

$$\int_0^\pi \sin x = [-\cos x]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) =$$
$$= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

7.18 Własności całek nieoznaczonych

Całka nieoznaczona ma pewne własności całki oznaczonej: wyciąganie czynnika stałego:

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$$

całka sumy:

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = \int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x$$

Przykład:

$$\int (x+2)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

7.19 Metody obliczania całek

Wiele całek możemy obliczyć, odwracając wzory na pochodne:

Funkcja $f(x)$	Całka $\int f(x)\mathrm{d}x$
0	C
1	$x + C$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$

7.20 Przykłady

W praktyce dążymy do tego, aby funkcję podcałkową przekształcić do postaci, którą można znaleźć w tablicach całek.

$$\begin{aligned}\int x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x &= \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x = \\ &= \int x^3\mathrm{d}x - 3\int x^2\mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C\end{aligned}$$

7.21 Zastosowania geometryczne całki

Znamy już podstawową interpretację geometryczną całki — składanie, sumowanie z „nieskończenie małych części” pola powierzchni. Inne zastosowania geometryczne całki to na przykład:

- obliczanie objętości brył
- obliczanie długości krzywej

7.22 Obliczanie objętości brył

Załóżmy, że dana jest bryła obrotowa, powstała z obrócenia wykresu funkcji $f(x)$ na odcinku $[a,b]$ (na przykład połowa kuli, powstała z obrócenia wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na odcinku $[0,1]$).

Wówczas objętość tej bryły jest dana wzorem

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

Na przykład objętość połowy kuli o promieniu 1:

$$V = \pi \int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\pi$$

7.23 Obliczanie długości łuku

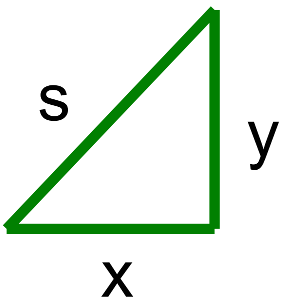
Jeśli krzywa dana jest równaniem postaci $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$, przy czym funkcja $f(x)$ jest gładka, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

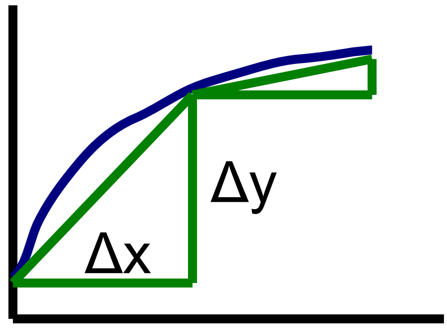
Ten wzór można interpretować jako graniczny przypadek twierdzenia Pitagorasa.

7.24 Obliczanie długości łuku (c.d.)

Dla trójkąta prostokątnego mamy $s^2 = x^2 + y^2$:



Gładką krzywą możemy przybliżyć przez łamaną i sumować długości przeciwprostokątnych: $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$



7.25 Całkowanie przez części

Niech f i g będą funkcjami gładkimi. Wówczas zachodzi następujący wzór:

$$\int fg' \mathrm{d}x = fg - \int gf' \mathrm{d}x$$

Jest to wzór na całkowanie przez części (wyrażenie podcałkowe dzielimy na dwie części: f i g). Wzór ten często przydaje się do obliczania całek.

7.26 Przykład

Obliczmy całkę

$$I = \int x \sin x \mathrm{d}x$$

Przyjmujemy $f = x$, $g' = \sin x$, mamy $I = \int fg' \mathrm{d}x$. Obliczamy: $f' = 1$, zaś $g = -\cos x$. Całkujemy przez części i dostajemy:

$$I = fg - \int f'g \mathrm{d}x$$

$$I = -x \cos x - \int (-\cos x) \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + C$$

7.27 Całkowanie przez podstawienie

Inną bardzo przydatną metodą całkowania jest całkowanie przez podstawienie (całkowanie przez zamianę zmiennych). Wzór ten wynika ze wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

gdzie

$$u = g(x)$$

7.28 Przykłady

Obliczmy całkę

$$I = \int 2(x^2+25)^4 x\mathrm{d}x$$

Pierwszy sposób: wymnażamy nawias i liczymy oddzielne całki.

Drugi sposób: podstawienie $u = g(x) = x^2 + 25$.

Mamy $f(u) = u^4$, $g' = 2x$

$$I = \int u^4 \mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^5 = \frac{1}{5}(x^2+25)^5$$

7.29 Przykłady (c.d.)

Obliczmy całkę

$$I = \int \sin x \cos x \mathrm{d}x$$

Zastosujemy podstawienie $u = \sin x$

7.30 Całki funkcji nieograniczonych

Dotychczas rozważaliśmy całki funkcji ograniczonych. Co stanie się, jeśli funkcja będzie dążyć do ∞ na brzegu przedziału całkowania? Jak wówczas definiujemy całkę?

Załóżmy, że w funkcja f ma w punkcie $x = a$ granicę (prawostronną *) równą ∞. Wówczas:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

to znaczy obliczamy całkę po coraz większym przedziale i badamy zbieżność takiego ciągu.

7.31 Przykłady

Czy całka z funkcji dążącej do ∞ istnieje? Okazuje się, że zależy to od wybranej funkcji. Na przykład:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$$

(funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do ∞, ale „powoli”). Natomiast dla $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mamy:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = -1 + \frac{1}{\varepsilon} \to \infty$$

Mówimy wówczas, że całka jest rozbieżna. (Funkcja $\frac{1}{x^2}$ zbyt szybko dąży do ∞.)

7.32 Całki na przedziale nieskończonym

Rozważaliśmy przypadek, gdy funkcja dąży do nieskończoności. A co się dzieje, gdy funkcja jest ograniczona, a nieskończony jest przedział całkowania?

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x$$

(podobnie dla $-\infty$)

Zauważmy, że jeśli pole pod wykresem funkcji ma być skończone na nieskończonym przedziale, to koniecznie funkcja musi dążyć do zera.

7.33 Przykłady

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}[2\sqrt{x}]_1^M = \lim_{M\to\infty}(2\sqrt{M}-2) = \infty$$

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do zera, ale zbyt wolno. Natomiast dla $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mamy:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}\right) + 1 = 1$$

Zauważmy, że dla tych dwóch funkcji sytuacje w zerze i w nieskończoności są odwrotne.

7.34 Równania różniczkowe

Używając całek możemy rozwiązywać równania różniczkowe.

Zadanie: upuszczamy z wysokości 1 metra kulkę. Jak wyraża się zależność jej położenia od czasu?

$$y'' = -g$$

$$y' = -gt + C$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

Stałe C i D wyznaczamy z warunków początkowych (położenie = 1, prędkość = 0).

Część III
Algebra liniowa

8 Przestrzenie wektorowe

Rozdział ten, podobnie jak większa część naszego wprowadzenia do algebry liniowej, oparta jest na skrypcie prof. Pawła Urbańskiego "Notatki do wykładu z algebry dla fizyków" z roku 1991.

8.1 Przykłady wektorów

Co to jest płaszczyzna? Zwykle jest to dla nas zbiór punktów opisywany dwiema liczbami, które nazywamy współrzędnymi. Co to znaczy, że wprowadzamy współrzędne? Wybieramy jakiś punkt, który nazywamy zerem. Następnie wybieramy dwie osie — proste prostopadłe krzyżujące się w punkcie. Na osiach oznaczamy jednostkę — "w prawo" i "do góry". Tak dostajemy punkty, które oznaczamy $1_x = (1, 0)$ i $1_y = (0, 1)$, co znaczy:

- pierwszy punkt, czyli $(1, 0)$: startując w zerze (punkt 0) zrób jeden krok "w prawo" i 0 kroków "do góry";

- drugi punkt, czyli $(0, 1)$: startując w zerze (punkt 0) zrób 0 kroków "w prawo" i 1 krok "do góry".

Można oczywiście robić kroki w innej kolejności, np. $(0, 1)$: startując w zerze (punkt 0) zrób 1 krok "do góry" i 0 kroków "w prawo", ale ja wolę kolejność czytania współrzędnych od lewej do prawej.

Mając tak określony układ współrzędnych możemy określić współrzędne — czyli pozycję — każdego punktu na płaszczyźnie. Np. punkt o współrzędnych $(3, -2/7)$ to punkt do którego dojdziemy robiąc 3 kroki jednostkowe "w prawo" i 2/7 kroku jednostkowego **"w dół"**.

Przykład 8.1: Jak opisać punkty $(-\pi/13, \sqrt{23})$, $(-e, \pi)$?

$\triangle$

Wiemy więc, jak odnaleźć punkt określony przez współrzędne. A jak znaleźć współrzędne wybranego punktu P? To proste: rysujemy dwie proste przechodzące przez P, jedna równoległa do osi OY i przecinająca OX w punkcie $P_x = (x_0, 0)$, druga równoległa do osi OX i przecinająca oś OY w punkcie $P_y = (0, y_0)$. Współrzędne punku P odczytujemy na osiach w punktach przecięcia prostych z osiami. x_0 jest stosunkiem długości odcinka OP_x do długości odcinka $O1_x$, y_0 jest stosunkiem długości odcinka OP_y do długości odcinka $O1_y$.

Skierowane odcinki $O1_x$ i $O1_y$ nazywamy wektorami jednostkowymi i będziemy je oznaczać albo $\hat{x}, \hat{y}$, albo e_1, e_2. Zauważmy, że jak się już umówimy że współrzędne wszystkich punktów mierzymy względem zera, to współrzędne **punktu** (x_0, y_0) są jednocześnie współrzędnymi **wektora** łączącego punkt z zerem układu współrzędnych. Dlatego możemy utożsamiać zbiór punktów na płaszczyźnie ze zbiorem wektorów. Tak interpretowana płaszczyzna jest jednym z najprostszych przykładów **przestrzeni wektorowej**. Zatem możemy zamiennie używać pojęć punkt i wektor. Od tej pory będziemy jednak mówić raczej o wektorach i punktu/wektory będziemy oznaczać v, w, v_1, w_2, v_n, itd.

Zauważmy, że cała powyższa procedura identyfikacji punktów na płaszczyźnie nie wymaga tego, żeby osie były prostopadłe. Wystarczy, że **wektory rozpinające** naszą płaszczyznę, czyli skierowane odcinki łączące punkt 0 z punktami $(1, 0)$ i $(0, 1)$ były **liniowo niezależne** (tutaj: nie współliniowe). Wkrótce wrócimy do tego pojęcia. Wybierzmy więc dwa dowolne (byle nie współliniowe) wektory f_1 i f_2. Wtedy każdy punkt na płaszczyźnie możemy zapisać jako **kombinację liniową** tych wektorów, czyli w postaci

$$v = x_1 f_1 + x_2 f_2.$$

Wyrażenie $x_1 f_1 + x_2 f_2$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów f_1 i f_2.

Przykład 8.2: Weźmy płaszczyznę z tradycyjnym opisem, gdzie wektory $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ są prostopadłe. Niech nowe **wektory bazowe** $f_1 = (1, 1) = 1e_1 + 1e_2 = e_1 + e_2$ a $f_2 = (-1, 1) = -1e_1 + 1e_2 = -e_1 + e_2$.

Wtedy punkt, który w oryginalnym układzie miał współrzędne $(3,3)$ (co zapisujemy $(3,3)_e$, żeby nie pomylić **bazy**, z której korzystamy) teraz ma współrzędne $(1,0)_f$. Znaczy to tyle, że żeby do niego dojść musimy pójść jeden krok w kierunku wektora f_1 i zero kroków w kierunku wektora f_2.

Jakie współrzędne ma dowolny punkt? Jeżeli w starej bazie $v = (x,y)_e$, to teraz będzie $(,)_f$. Np. $(-\sqrt{2},\pi)_e = (,)_f$

[Rysunek]

Przykład 8.3: W powyższym schemacie weźmy wektory bazowe $f_1 = (1,1) = e_1 + e_2$ a $f_2 = (0,1) = e_2$. Teraz $(-\sqrt{2},\pi)_e = (,)_f$

[Rysunek]

$\triangle$

Zgadzamy się więc, że na tej samej płaszczyźnie możemy wprowadzać różne układy współrzędnych. A więc zapis (x,y) jest niejednoznaczny, dopóki nie umówimy się jakich wektorów bazowych używamy.

Możemy to wykorzystać do opisu różnych obiektów.

8.2 Przykłady przestrzeni wektorowych.

Rozważmy zbiór wszystkich funkcji liniowych, czyli funkcji postaci $a+bx$. Mamy więc funkcje zadane jako kombinacje liniowe funkcji stałej $e_1(x) = 1$ i funkcji liniowej $e_2(x) = x$. Zatem każdą funkcję liniową $a + bx$ możemy zapisać jako wektor $(a,b)_e \equiv a + bx$ w przestrzeni wektorowej rozpiętej przez e_1, e_2.

Ogólnie, możemy mówić o przestrzeni liniowej wielomianów rozpiętej przez funkcje $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$. Np. w przestrzeni wielomianów stopnia 3, w standardowej bazie, wielomian $x^3 - 2x + 1.5 = (1.5, -2, 0, 1)$.

Możemy też używać innej bazy, np. monomiany przesunięte do dowolnego punktu, powiedzmy 1: $f_n = (x-1)^{n-1}$, to jest $f_1 = 1$, $f_2 = x - 1$, $f_3 = (x-1)^2$, itd.

Przykład 8.4: Zapisz funkcję $x^3 - 2x + 1.5 = (1.5, -2, 0, 1)_e$ w bazie f.

$\triangle$

Podobnie możemy opisywać inne przestrzenie funkcyjne, np. funkcje postaci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sin(k\pi x/L)$$

[Jak wyglądają takie funkcje? zobaczmy w Matlabie!] Kiedy używamy takich baz funkcyjnych? Np. przy interpolacji funkcji albo dopasowywaniu funkcji do danych (B-spline functions).

Możemy też rozważać funkcje wektorowe, to jest funkcje o wartościach będących wektorami. Rozważmy na przykład funkcję odwzorowującą oś $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^2$ określoną wzorem $(\cos\omega t, \sin\omega t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$. Jak wygląda wykres tej funkcji?

8.3 Grupy i ciała

[Struktury algebraiczne. Grupa, ciało.]

Definicja 8.1 (PU) *Grupą nazywamy niepusty zbiór G z działaniem dwuargumentowym, to jest odwzorowaniem $* : G \times G \to G$ o własnościach*

1. *łączność: $a * (b * c) = (a * b) * c$*

2. *istnienie jedności: istnieje takie e, że dla każdego elementu $a \in G$ zachodzi $a * e = e * a = a$*

3. *istnienie elementu odwrotnego: dla każdego elementu $a \in G$ istnieje taki $x \in G$, że $a * x = x * a = e$.*

Jeżeli do tego dla każdych dwóch elementów $a, b \in G$ zachodzi $a * b = b * a$ to mówimy, że grupa jest przemienna albo abelowa.

Przykład 8.5: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

Przykład 8.6: okrąg jednostkowy S^1 na płaszczyźnie zespolonej z mnożeniem.

Przykład 8.7: pierwiastki ustalonego stopnia z jedynki z mnożeniem

Przykład 8.8: Bijekcje ustalonego zbioru A z działaniem superpozycji (złożenia funkcji).

$\triangle$

Fakt 8.2 (PU) *Każda grupa $(G, *)$ ma dokładnie jeden element neutralny e i dla każdego $a \in G$ istnieje dokładnie jeden element odwrotny, który oznaczamy a^{-1}.*

Fakt 8.3 (PU) 1. $(a^{-1})^{-1} = a$

2. $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

3. *jeżeli $a * x = b$, to $x = a^{-1} * b$*

4. *jeżeli $x * a = b$, to $x = b * a^{-1}$*

5. *jeżeli dla pewnego a zachodzi $a * x = a * y$ to $x = y$.*

Przykładowy dowód.

Definicja 8.4 (PU) *Ciałem nazywamy zbiór K z dwoma działaniami dwuargumentowymi "$+$" i "$\cdot$"takimi, że*

1. *$(K, +)$ jest grupą abelową*

2. *$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ jest grupą abelową, gdzie 0 jest elementem neutralnym ze względu na dodawanie*

3. *dla dowolnych trzech elementów $a, b, c \in K$ zachodzi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*

Przykład 8.9: Liczby zespolone z dodawaniem i mnożeniem.

Przykład 8.10: Liczby rzeczywiste z dodawaniem i mnożeniem.

Przykład 8.11: Liczby wymierne z dodawaniem i mnożeniem.

Przykład 8.12: Zbiór dwuelementowy $\{0, 1\}$ z działaniami dodawania modulo 2 i mnożenia.

$\triangle$

8.4 Przestrzeń wektorowa

Definicja 8.5 *Przestrzenią wektorową nad ciałem K nazywamy grupę abelową $(V, +)$ z odwzorowaniem $K \times V \to V : (\lambda, v) \to \lambda v$ (mnożeniem wektorów przez skalary) takim, że dla wszystkich $\lambda, \mu \in K$ oraz $v, w \in V$ zachodzi:*

1. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
2. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
3. $1v = v$
4. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

Zauważmy, że mamy tu dwa różne dodawania i dwa różne mnożenia! Mamy dodawanie i mnożenie skalarów w ciele K, dodawanie wektorów w przestrzeni V, oraz mnożenie wektorów przez skalar. Gdybyśmy dodawanie i mnożenie w ciele K oznaczali symbolami $\dot{+}, *$, dodawanie wektorów $+$, a mnożenie wektora przez skalar $\cdot$, to jak wyglądałyby powyższe działania?

Elementy przestrzeni V nazywamy wektorami, elementy ciała K nazywamy skalarami. Będziemy prawie wyłącznie używać ciała $\mathbb{R}$, czasami $\mathbb{C}$. Dlatego powinna nam wystarczyć prostsza definicja przestrzeni wektorowej:

Definicja 8.6 *Przestrzenią wektorową nazywamy zbiór wektorów V z przemiennym dodawaniem wektorów, oraz z mnożeniem wektorów $v \in V$ przez liczby $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v \in V$ takim, że dla wszystkich $\lambda, \mu \in K$ oraz $v, w \in V$ zachodzi:*

1. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
2. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
3. $1v = v$
4. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

Fakt 8.7

1. *Dla każdego $v \in V$: $0v = \mathbf{0}$*
2. *Dla każdego $v \in V$: $(-1)v = -v$, to znaczy $v + (-1)v = 0$*
3. *dla każdego $\lambda \in K$ mamy $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$*
4. *jeżeli $\lambda v = 0$ to albo $\lambda = 0$ albo $v = \mathbf{0}$*

Przykład 8.13: K^n z dodawaniem

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

i mnożeniem przez skalar

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Przykład 8.14: Dla dowolnego zbioru A weźmy zbiór odwzorowań z tego zbioru w ciało K, to jest $V = Map(A, K)$ z działaniami

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

oraz

$$(\lambda f)(a) = \lambda f(a)$$

Wtedy V jest przestrzenią wektorową. Na przykład biorąc $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ dostajemy poprzedni przykład.

△

Definicja 8.8 *Podprzestrzenią wektorową przestrzeni V nazywamy niepusty zbiór $S \subset V$, który z działaniami indukowanymi z V jest przestrzenią wektorową.*

Przykład 8.15: Wielomianowe na $\mathbb{R}$ o współczynnikach rzeczywistych tworzą podprzestrzeń przestrzeni wszystkich funkcji a wartościach rzeczywistych.

Przykład 8.16: Inne podprzestrzenie przestrzeni $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: wielomiany parzyste $(1, x^2, x^4, x^6, \ldots)$, funkcje różniczkowalne, itd.

Przykład 8.17: Bardzo ważny przykład: zbiór rozwiązań układu równań liniowych

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

tworzy podprzestrzeń wektorową przestrzeni K^n.

△

Fakt 8.9 *Jeżeli równanie (1) ma więcej niewiadomych n niż równań m ($n > m$), to ma niezerowe rozwiązanie.*

Definicja 8.10 *Weźmy dowolny ciąg wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Wektor*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_n v_n \in V$$

gdzie $\lambda_k \in V$ nazywamy kombinacją liniową wektorów v_k.

Fakt 8.11 *S jest podprzestrzenią wektorową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\lambda, \mu \in K$ i dla każdego $v, w \in S$ zachodzi*

$$\lambda v + \mu w \in S.$$

Czyli dowolna kombinacja liniowa dowolnych wektorów z S należy do S.

Definicja 8.12 *Weźmy dowolny podzbiór S przestrzeni wektorowej V. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych S oznaczamy $\langle S \rangle$.*

Fakt 8.13 *$\langle S \rangle$ jest podprzestrzenią wektorową V.*

Fakt 8.14 *$\langle S \rangle$ jest najmniejszą podprzestrzenią wektorową V zawierającą S.*

Przykład 8.18: $S = \{1, x, x + x^2, 2x^2 - 2\}$ — $\langle S \rangle$ to zbiór wielomianów stopnia co najwyżej 2.

△

8.5 Liniowa niezależność. Bazy.

Definicja 8.15 *Przestrzeń wektorową V nazywamy skończenie wymiarową jeżeli można ją rozpiąć skończoną liczbą wektorów. [To znaczy istnieją takie wektory $v_1, v_2, \dots, v_n$, że $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.]*

Przykład 8.19: V — przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant 2$ a $S = \{1, x, x + x^2, 2x^2 - 2\}$

Przykład 8.20: $V = K^n$ a $v_k = (\overset{1}{0}, \dots, \overset{k-1}{0}, \overset{k}{1}, \overset{k+1}{0}, \dots, \overset{n}{0})$. To jest np. model rejestracji elektrofizjologicznych. Każdy wektor $v \in V$ odpowiada jednej rejestracji, a kolejne "oczka" (współrzędne) w wektorze v odpowiadają kolejnym czasom rejestracji.

Przykład 8.21: Przestrzeń wszystkich odwzorowań $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest nieskończenie wymiarowa. Te odwzorowania to ciągi a_n o elementach rzeczywistych. Porównaj ten przykład z poprzednim!

△

Definicja 8.16 *Zbiór wektorów $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ z przestrzeni V nazywamy liniowo niezależnym, jeżeli żaden z nich nie może być przedstawiony jako kombinacja liniowa pozostałych. Jeżeli zbiór wektorów nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest liniowo zależny.*

Przykład 8.22: Wielomiany $\{1, x, x^3\}$ są liniowo niezależne.

Przykład 8.23: $V = \mathbb{R}^2$, czyli V to zbiór wektorów o dwóch rzeczywistych współrzędnych $V = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Wtedy wektory $(1, 0), (0, 1)$ są liniowo niezależne, a wektory $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ są liniowo zależne, bo np. $(3, 4) = 2 \cdot (2, 3) - (1, 2)$, czyli istnieje kombinacja liniowa dwóch wektorów dająca wektor trzeci.

Przykład 8.24: $V = \mathbb{C}^1$ nad ciałem liczb rzeczywistych, to znaczy wektory z V to liczby zespolone, a skalary to liczby rzeczywiste. Wtedy wektory $1, i$ są liniowo niezależne, bo nie ma takiej liczby rzeczywistej a, żeby $1 \cdot a = i$.

Przykład 8.25: $V = \mathbb{C}^1$ nad ciałem liczb zespolonych, to znaczy wektory z V to liczby zespolone, a skalary to też liczby zespolone. Wtedy wektory $1, i$ nie są liniowo niezależne, bo jest taka liczba zespolona a, że $1 \cdot a = i$. Mianowicie $a = i$.

Przykład 8.26: Dowolny zbiór wektorów zawierający wektor 0 jest liniowo zależny.

Przykład 8.27: Jeżeli $v \neq 0$ to jednoelementowy zbiór $\{v\}$ jest liniowo niezależny.

△

Definicja 8.17 *Zbiór wektorów $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nazywamy bazą przestrzeni V, jeżeli jest liniowo niezależny rozpina V $(\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = V)$.*

Fakt 8.18 *Jeżeli przestrzeń wektorowa V ma bazę, to każdy jej wektor da się przedstawić* ***jednoznacznie*** *jako kombinacja liniowa wektorów bazy.*

Twierdzenie 8.19 *Jeżeli przestrzeń wektorowa V ma n-elementową bazę to każdy k-elementowy zbiór wektorów $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, przy $k > n$, jest liniowo zależny.*

Wnioski z powyższego twierdzenia

Fakt 8.20

1. *Jeżeli $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest bazą V a wektory $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ są liniowo niezależne, to $k \leqslant n$.*
2. *Jeżeli $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ są bazami V, to $k = n$.*

Twierdzenie 8.21 *Jeżeli V jest przestrzenią skończenie wymiarową i $V \neq \{0\}$ to V ma bazę.*

Zatem liczba elementów bazy skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej jest dobrze określona. Nazywamy ją wymiarem przestrzeni V i oznaczamy $\dim V$ albo $\dim_K V$ jeżeli chcemy podkreślić nad jakim ciałem liczbowym rozważamy daną przestrzeń.

Przykład 8.28: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Przykład 8.29: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Przykład 8.30: $\dim K^n = n$.

△

9 Macierze

Macierz to zbiór liczb ułożonych równo w wierszach i kolumnach. Rozważmy macierz A o m wierszach i n kolumnach. Jej elementy będziemy oznaczali przez ${A^i}_j$, gdzie i numeruje wiersze a j numeruje kolumny. Zatem

$$A \equiv [{A^i}_j] = \begin{bmatrix} {A^1}_1 & {A^1}_2 & \dots & {A^1}_n \\ {A^2}_1 & {A^2}_2 & \dots & {A^2}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A^m}_1 & {A^m}_2 & \dots & {A^m}_n \end{bmatrix}$$

Zwykle elementy macierzy należą do jakiegoś ciała liczbowego K. Zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach z elementami z ciała K będziemy oznaczać ${\mathbf{M}^m}_n(K)$.

Macierze możemy dodawać do siebie tylko wtedy, gdy ich wymiary się zgadzają. Dodajemy je element po elemencie:

$$[{A^i}_j] + [{B^i}_j] = [{A^i}_j + {B^i}_j].$$

Możemy je tez mnożyć przez liczbę:

$$\lambda[{A^i}_j] = [\lambda {A^i}_j].$$

Zbiór macierzy ${\mathbf{M}^m}_n(K)$ z działaniami dodawania i mnożenia przez skalar tworzy przestrzeń wektorową. Wymiar tej przestrzeni wynosi $m \cdot n$ a jej standardową bazę stanowią macierze ${E^k}_l$ o wszystkich elementach zerowych z wyjątkiem elementu leżącego w k-tym wierszu i l-tej kolumnie.

Przykład 9.1: Macierze ze zbioru ${\mathbf{M}^2}_2(\mathbb{R})$ mają postać

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

i są rozpięte przez 4 wektory bazowe,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Czyli

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

△

Wektory możemy traktować jako szczególne przypadki macierzy. Mówimy o wektorach kolumnowych $\mathbf{M}^n{}_1$ i wierszowych $\mathbf{M}^1{}_n$. Jeżeli nie określamy, czy wektor jest wierszowy czy kolumnowy, to zwykle będziemy mówili o kolumnowym. Wektory wierszowe nazywamy czasem kowektorami. Zatem typowy wektor wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}$$

Definicja 9.1 *Transpozycja macierzy to operacja, która zamienia wiersze z kolumnami. Inaczej mówiąc, to przekształcenie*

$$^T : \mathbf{M}^n{}_m \to \mathbf{M}^m{}_n : A \to A^T,$$

w którym elementy macierzowe $[{A^T}^i{}_j] = [A^j{}_i]$.

9.1 Rząd macierzy

Przez $\bar{A}^i$ będziemy oznaczać i-ty wiersz, a przez $\bar{A}_j$ j-tą kolumnę macierzy $A \in \mathbf{M}^n{}_m$.

Definicja 9.2 *Rzędem wierszowym macierzy* $A \in \mathbf{M}^n{}_m$ *nazywamy* $\dim\langle \bar{A}^1, \bar{A}^2, \ldots, \bar{A}^n \rangle$, *a rzędem kolumnowym nazywamy* $\dim\langle \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m \rangle$.

Twierdzenie 9.3 *Rząd kolumnowy macierzy jest równy jej rzędowi wierszowemu, dlatego nazywamy go po prostu rzędem macierzy* A *i oznaczamy* $\operatorname{rz} A$

Przykład 9.2: Rząd przykładowej macierzy. Redukcja wierszowa, kolumnowa.

△

Fakt 9.4

1. $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} A^T$
2. *Jeżeli do dowolnej kolumny macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn, to rząd macierzy się nie zmieni.*
3. *Jeżeli do dowolnego wiersza macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn, to rząd macierzy się nie zmieni.*
4. *Jeżeli dowolnie przemieszamy wiersze lub kolumny macierzy, to jej rząd się nie zmieni.*

Przykład 9.3: Pokazać powyższe operacje na powyższej macierzy.

△

9.2 Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy to operacja, która przekształca dwie macierze o zgodnej strukturze w jedną. Licząc od lewej, pierwsza macierz musi mieć tyle samo kolumn, ile druga ma wierszy. Zatem jeżeli $A \in \mathbf{M}^n{}_p$, a $B \in \mathbf{M}^p{}_m$, to $A \cdot B \in \mathbf{M}^n{}_m$ jest zdefiniowane wzorem

$$[(A \cdot B)^i{}_j] = \sum_{k=1}^{p} A^i{}_k B^k{}_j.$$

Przykład 9.4: $A \cdot B$

△

Fakt 9.5 *1. Mnożenie macierzy jest na ogół nieprzemienne, to jest zwykle $A \cdot B \neq B \cdot A$.*

2. Mnożenie macierzy jest łączne i rozdzielne względem dodawania.

Definicja 9.6 *Algebrą nazywamy przestrzeń wektorową M nad ciałem Kz dodatkowo określonym mnożeniem rozdzielnym względem dodawania ($A, B, C\ inM, \alpha, \beta \in K$)*

$$\begin{aligned} C \cdot (\alpha A + \beta B) &= \alpha C \cdot A + \beta C \cdot B \\ (\alpha A + \beta B) \cdot C &= \alpha A \cdot C + \beta B \cdot C \end{aligned}$$

1. *Jeżeli $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, to algebra jest łączna.*
2. *Jeżeli $A \cdot B = B \cdot A$, to jest przemienna.*
3. *Jeżeli istnieje element $\mathbf{1} \in M$ taki, że dla każdego $A \in M$ zachodzi $A \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot A = A$, to nazywamy go jednością (jedynką) i mówimy o algebrze z jednością (jedynką).*
4. *Jeżeli element B algebry z jedynką spełnia $A \cdot B = \mathbf{1}$ to nazywamy go lewą odwrotnością A.*
5. *Jeżeli element B algebry z jedynką spełnia $B \cdot A = \mathbf{1}$ to nazywamy go prawą odwrotnością A.*
6. *Jeżeli każdy element algebry z jedynką M ma prawą i lewą odwrotność, które są sobie równe, to taką algebrę nazywamy grupą.*

Przykład 9.5: Rozważmy iloczyn w $\mathbb{R}^2$ zdefiniowany jako

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Pokaż, że daje to przemienną algebrę z jedynką. Czy spotkałeś się już z tą algebrą?

Przykład 9.6: Zbiór macierzy $\mathbf{M}^n{}_n$ z mnożeniem macierzowym stanowi algebrę z jedynką. Jedynką jest macierz I o elementach danych deltą Kroneckera $\delta^i{}_j = 1$ dla $i = j$ i 0 dla $i \neq j$. Jeżeli macierz A ma odwrotność, B, to jest to lewa i prawa odwrotność, to jest $A \cdot B = B \cdot A = I$.

△

Grupy macierzowe — przykłady

różne grupy macierzy. Jak to się ma do analizy danych? modelowania? Może falki? analiza fourierowska?

10 Odwzorowania liniowe

Macierze nie biorą się znikąd. Zwykle pojawiają się jako reprezentacje różnych obiektów, na przykład odwzorowań liniowych, w konkretnych bazach.

Definicja 10.1 *Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Odwzorowanie $F : V \to W$ nazywamy liniowym, jeżeli*

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \\ F(\lambda v_1) &= \lambda F(v_1) \end{aligned}$$

dla $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in K$.

Przykład 10.1: Jako V weźmy przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[-1, 1]$, czyli $V = \mathcal{C}([-1, 1])$; $W = \mathbb{R}$. Odwzorowanie $F(f) := f(0)$ jest liniowe.

Przykład 10.2: Jako V weźmy zbiór funkcji różniczkowalnych na $\mathbb{R}$, $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, jako $W = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ — przestrzeń funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$. Różniczkowanie jest operacją liniową: $F(f) := f'$.

Przykład 10.3: Które z poniższych odwzorowań jest liniowe?

$$F_1(x) := 2x^2, \qquad F_2(x) := 3x + 5, \qquad F_3(x) := -2x.$$

△

Fakt 10.2 *Weźmy dwa odwzorowania liniowe $F, G : V \to W$ i $\lambda \in K$. Wówczas $F + G$ i λF są również liniowe.*

To znaczy, że zbiór wszystkich odwzorowań liniowych z V w W tworzy przestrzeń wektorową! Oznaczamy ją $L(V, W)$. Dwa specjalne przypadki mają specjalne oznaczenia: $L(V, V) \equiv \mathrm{End}(V)$ jest przestrzenią endomorfizmów przestrzeni V, a $L(V, K) \equiv V^*$ jest przestrzenią dualną do V.

Fakt 10.3 *Niech V, W, U będą przestrzeniami wektorowymi nad K. Jeżeli $F : V \to U$ oraz $G : U \to W$ są odwzorowaniami liniowymi, to także ich złożenie $G \circ F : V \to W$ jest odwzorowaniem liniowym.*

[współrzędne jako odwzorowania liniowe]

Fakt 10.4 *Każde odwzorowanie liniowe jest wyznaczone jednoznacznie przez swoje wartości na wektorach bazy.*

Przykład 10.4: a

△

10.1 Odwzorowanie odwrotne. Jądro i obraz odwzorowania.

izomorfizm!

str. 26–28 PU

10.2 Macierze jako reprezentacje odwzorowania liniowego w bazie

Weźmy bazę $e = (e_1, \ldots, e_n)$ przestrzeni wektorowej V. Każdy wektor $v \in V$ możemy jednoznacznie przedstawić w bazie jako

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \ldots v^n e_n.$$

Możemy więc reprezentować wektor v przy pomocy jego współrzędnych w bazie e, czyli tak:

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

Weźmy bazę $f = (f_1, \ldots, f_m)$ przestrzeni W i liniowe odwzorowanie $F : V \to W$. Wtedy

$$w := F(v) = F(v^1 e_1 + v^2 e_2 + \ldots v^n e_n 1) = v^1 F(e_1) + v^2 F(e_2) + \ldots v^n F(e_n)$$

Ostatnia równość bierze się z liniowości F. Ponieważ $F(e_k)$ jest wektorem w przestrzeni W, możemy go rozłożyć w bazie f, co nam daje

$$F(e_k) = [F(e_k)]^1 f_1 + [F(e_k)]^2 f_2 + \ldots + [F(e_k)]^m f_m$$

W takim razie, całe działanie operatora F na wektor v możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} F(v) &= v^1 F(e_1) + v^2 F(e_2) + \ldots v^n F(e_n) \\ &= v^1([F(e_1)]^1 f_1 + [F(e_1)]^2 f_2 + \ldots + [F(e_1)]^m f_m) + \\ &\quad + v^2([F(e_2)]^1 f_1 + [F(e_2)]^2 f_2 + \ldots + [F(e_2)]^m f_m) + \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + v^n([F(e_n)]^1 f_1 + [F(e_n)]^2 f_2 + \ldots + [F(e_n)]^m f_m) \\ &= w^1 f_1 + w^2 f_2 + \ldots w^m f_m, \end{aligned}$$

gdzie współrzędne w^k wektora w dane są iloczynem macierzy B, która jest reprezentacją operatora F w bazach e i f, i reprezentacji wektora v w bazie e. Macierz B to macierz o elementach $B^i{}_j = [F(e_j)]^i$; będziemy ją oznaczać przez $[F]^f{}_e$. Czyli

$$[F(v)]^f = [F]^f{}_e [v]^e.$$

Fakt 10.5 *1.* $[F + G]^f{}_e = [F]^f{}_e + [G]^f{}_e$.

2. $[\lambda F]^f{}_e = \lambda [F]^f{}_e$.

Zatem działania odwzorowań (operatorów) liniowych w przestrzeniach wektorowych można reprezentować mnożeniem macierzowym!

Fakt 10.6 *Jeżeli e jest bazą V, f jest bazą U, a g jest bazą W, oraz $F \in L(V, U)$ a $G \in L(U, W)$, to*

$$[G \circ F]^g{}_e = [G]^g{}_f [F]^f{}_e$$

10.3 Zamiana bazy

Weźmy dwie bazy $e, \tilde{e}$ w V i dwie bazy, $f, \tilde{f}$ w W. Zmiana reprezentacji odwzorowania liniowego $F \in L(V, W)$ jest realizowana przez ciąg operacji:

$$\begin{aligned}
[F]_e^f &= [F \circ \mathrm{Id}_V]^f{}_e \\
&= [F]^f{}_{\tilde{e}}[\mathrm{Id}_V]^{\tilde{e}}{}_e \\
&= [\mathrm{Id}_W \circ F]^f{}_{\tilde{e}}[\mathrm{Id}_V]^{\tilde{e}}{}_e \\
&= [\mathrm{Id}_W]^f{}_{\tilde{f}}[F]^{\tilde{f}}{}_{\tilde{e}}[\mathrm{Id}_V]^{\tilde{e}}{}_e
\end{aligned}$$

10.4 Układy równań liniowych

str. 28–29, 33–34 PU

Zadanie 10.1: Rozważmy przestrzeń wektorową wielomianów stopnia co najwyżej 2 oraz następująca bazę tej przestrzeni: $e_1 = 1 - x$, $e_2 = 1 + x$, $e_3 = x^2$. Jak w tej bazie można zapisać wektor (czyli w tym przypadku wielomian) $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$?

Rozwiązanie: musimy znaleźć współczynniki (liczby) p_1, p_2, p_3 takie, że $P(x) = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$. Robimy to, porównując współczynniki przy kolejnych potęgach x. Ponieważ współczynnik przy x^2 to p_3, więc $p_3 = 3$. Aby znaleźć p_1 i p_2 zauważmy, że $e_1 + e_2 = 2$, a $e_2 - e_1 = 2x$. Zatem $P(x) = 3e_3 + (e_2 - e_1) - \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, czyli $P(x) = 3e_3 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{3}{2}e_1$, $p_1 = -\frac{3}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź możemy zapisać następująco:

$$[P(x)]_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix},$$

gdzie symbol po lewej stronie oznacza macierz wektora $P(x)$ w bazie e.

Zadanie 10.2: Obliczyć iloczyn macierzy $C = AB$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie: macierze mnożymy korzystając z reguły „wiersz razy kolumna”, na przykład w lewym górnym rogu macierzy $C = AB$ będzie stała liczba powstała z pomnożenia górnego wiersza macierzy A (2, 0) przez lewą kolumnę macierzy B (3, 2), to znaczy $2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 6$. Pozostałe elementy macierzy C obliczamy analogicznie, to znaczy:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot3+0\cdot2 & 2\cdot2+0\cdot1 \\ 1\cdot3+3\cdot2 & 1\cdot2+3\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10.3: Zapisać układ równań $x + y = 5$, $2x - y = 0$ w postaci macierzowej. Zapisać rozwiązanie układu używając macierzy odwrotnej.

Rozwiązanie: układ w postaci macierzowej to

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Łatwo sprawdzić, że po wymnożeniu macierzy przez wektor dostaniemy wyjściowy układ równań.) Oznaczmy macierz po lewej stronie przez A:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas rozwiązanie układu to

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. Macierz odwrotna: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, co można sprawdzić obliczając iloczyny AA^{-1} i $A^{-1}A$.

Zadanie 10.4: Niech F będzie odwzorowaniem liniowym przestrzeni V wielomianów stopnia co najwyżej 3 w przestrzeń W wielomianów stopnia co najwyżej 2. Odwzorowanie F wielomianowi $P(x)$ przypisuje pochodną $P'(x)$. Zapisać macierz tego odwzorowania $[F]^f{}_e$ w bazach $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$ (baza V) i $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ (baza W).

Rozwiązanie: szukana macierz będzie miała cztery kolumny (wymiar V) i trzy wiersze (wymiar W). W celu zapisania macierzy odwzorowania F najpierw obliczymy jak działa ono na wektory bazowe e_i:

$$F(e_1) = (1)' = 0 \; ,$$

$$F(e_2) = (x)' = 1 \; ,$$

$$F(e_3) = (x^2)' = 2x \; ,$$

$$F(e_4) = (x^3)' = 3x^2 \; .$$

Kolumnami macierzy $[F]^f{}_e$ są współczynniki rozkładu (w bazie f) obliczonych powyżej wektorów $F(e_1)$ do $F(e_4)$, czyli (w tym przypadku, dla tej bazy f) po prostu współczynniki przy kolejnych potęgach x. Zatem:

$$[F]^f{}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; .$$

△

11 Równania różniczkowe

Równania różniczkowe to równania, w których występują pochodne nieznanych i szukanych funkcji. Pojawiają się w naturalny sposób jako modele matematyczne wielu zjawisk w przyrodzie i technice. Opisują procesy deterministyczne, skończenie wymiarowe i różniczkowalne.

Proces nazywamy deterministycznym, jeżeli jego przyszłość jest jednoznacznie określona przez stan obecny. Zbiór wszystkich możliwych stanów układu nazywamy przestrzenią fazową. Proces jest skończenie wymiarowy, jeżeli jego przestrzeń fazowa jest skończenie wymiarowa. Różniczkowalność oznacza, że rozwiązania równania opisywane są funkcjami różniczkowalnymi.

Na przykład z punktu widzenia ruchu pocisku jego stan jest określony przez jego położenie w 3 wymiarach i prędkość. Czyli przestrzeń fazowa pocisku jest sześciowymiarowa. Dla elektrofizjologa stan kawałka błony komórkowej aksona kałamarnicy można opisać przy pomocy 4 parametrów: różnicy potencjałów po obu stronach błony (V) i prawdopodobieństwa otwarcia bramki w jednym z kanałów potasowych (n) i sodowych (m, h).

Ogólne równanie różniczkowe n-go rzędu ma postać

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, dx/dt, \ldots, d^{n-1}x/dt^{n-1})$$

[Można ogólniej: $F(t, x, , dx/dt, \ldots, d^n x/dt^n) = 0$] Jeżeli wprowadzimy zmienne

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= dx/dt \\ &\vdots \\ x_n &= d^{n-1}x/dt^{n-1} \end{aligned}$$

to powyższe równanie możemy zapisać w postaci wektorowej

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_k}{dt} &= x_{k+1} \qquad \text{dla}\, k = 2, \ldots, n-1 \\
\frac{dx_n}{dt} &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

11.1 Przykłady równań różniczkowych

Przykład 11.1: (Motywacja — skąd się bierze? Przeskoki między stanami) Równanie kinetyczne

$$\frac{dm}{dt} = \alpha(1-m) - \beta m$$

jest równoważne równaniu

$$\tau \frac{dm}{dt} = m - m_\infty$$

[przeliczyć. wyznaczyć τ, m_∞]

Przykład 11.2: Oscylator harmoniczny

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= -kx \\
\frac{dx}{dt} &= v
\end{aligned}
$$

inaczej

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -(k/m)x = -\omega^2 x \\
\frac{dx}{dt} &= v
\end{aligned}
$$

Zwykle zbieramy wszystkie zmienne w jeden wektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Weźmy $x_1 = x, x_2 = v$. Wtedy równanie oscylatora przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Funkcja $\mathbf{F}$ oznacza pole wektorowe, które zadaje nasze równanie różniczkowe. Wszystkie równania różniczkowe można sprowadzić do takiej postaci. Zatem wystarczy nauczyć się rozwiązywać równania różniczkowe wektorowe stopnia pierwszego.

Pole wektorowe dla oscylatora harmonicznego

$$\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v \\ -\omega^2 x \end{bmatrix}$$

pokazane jest na rysunku []. Strzałki pokazują kierunek i wielkość wektora $\mathbf{F}$ w danym punkcie. Rozwiązania równania dla danego warunku początkowego to krzywe na płaszczyźnie fazowej, w każdym punkcie styczne do pola $\mathbf{F}$.

Przykład 11.3: Równanie różniczkowe wahadła wymuszonego z tłumieniem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(g/l)\sin(x) - \gamma\frac{dx}{dt} + A\cos(\Omega t)$$

czyli

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -\omega^2 \sin(x) - \gamma v + A\cos\theta \\
\frac{dx}{dt} &= v \\
\frac{d\theta}{dt} &= \Omega
\end{aligned}
$$

Przykład 11.4: Równania Lorentza

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{dt} &= -XY + rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ\end{aligned}$$

gdzie $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$.

Przykład 11.5: Równania Hodgkina-Huxleya

$$\begin{aligned}c_m \frac{dV}{dt} &= -i_m + \frac{I_e}{A} \\ i_m &= \bar{g}_L(V - E_L) + \bar{g}_K n^4 (v - E_k) + \bar{g}_{Na} m^3 h (V - E_{Na}) \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h\end{aligned}$$

gdzie funkcje α, β są zadanymi funkcjami potencjału V.

Przykład 11.6: Równania Fitzhugh-Nagumo

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= V(a-V)(V-1) - W + I \\ \frac{dw}{dt} &= bV - cw.\end{aligned}$$

np. $a = \pm 0.1, b = 0.01, c = 0.02$

Przykład 11.7: Równania Lotki-Volterry (problem drapieżnik-ofiara)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy\end{aligned}$$

x — ofiara, y — drapieżnik

Przykład 11.8: Trajektoria pocisku

△

11.2 Rozwiązywanie równań różniczkowych

Rozwiązywanie równań różniczkowych sprowadza się do całkowania. W jednym wymiarze jest to (koncepcyjnie) bardzo proste.

Przykład 11.9: Równanie kinetyczne

$$\tau \frac{dm}{dt} = m - m_\infty$$

rozwiązujemy całkując obie strony.

$$\begin{aligned}\frac{dm}{m - m_\infty} &= \frac{dt}{\tau} \\ \int_{m_0}^{m_1} \frac{dm}{m - m_\infty} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(m - m_\infty)|_{m_0}^{m_1} &= \frac{t}{\tau}|_{t_0}^{t_1} \\
\ln(m_1 - m_\infty) - \ln(m_0 - m_\infty) &= (t_1 - t_0)/\tau \\
\ln\frac{m_1 - m_\infty}{m_0 - m_\infty} &= (t_1 - t_0)/\tau \\
\frac{m_1 - m_\infty}{m_0 - m_\infty} &= \exp(\frac{t_1 - t_0}{\tau}) \\
m_1 - m_\infty &= (m_0 - m_\infty)\exp(\frac{t_1 - t_0}{\tau}) \\
m(t) &= m_\infty + (m_0 - m_\infty)\exp(\frac{t - t_0}{\tau})
\end{aligned}$$

△

W większej liczbie wymiarów jest trudniej, bo kiedy całkujemy po jednej zmiennej, druga zmienna też się zmienia. Nie możemy więc najpierw rozwiązać jednego równania, a potem drugiego: musimy robić to równocześnie.

Ogólnych metod całkowania równań różniczkowych nieliniowych stopnia wyższego niż jeden nie ma. Są pewne szczególne równania, które daje się rozwiązać, dla niektórych można znaleźć szczególne rozwiązania. Jedyną klasą równań różniczkowych dla których istnieje solidna i ogólna teoria są równania liniowe, jednorodne i niejednorodne. My ograniczymy się tutaj do najprostszej klasy.

*Istnienie i jednoznaczność rozwiązań - nie.

11.3 Równania liniowe o stałych współczynnikach

Równanie oscylatora harmonicznego

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -\omega^2 x \\
\frac{dx}{dt} &= v
\end{aligned}$$

mogę zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2}$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

zaś

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Równania, o ogólnej postaci (2), gdzie wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nazywamy równaniami liniowymi jednorodnymi. Równania niejednorodne mają jeszcze jeden dodatkowy człon:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \tag{3}$$

Co to znaczy, że funkcja $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ jest rozwiązaniem równania (2)? To znaczy, że jak policzę pochodną wektora $\mathbf{x}(t)$ to wyjdzie mi tyle samo, co gdybym pomnożył ten wektor przez macierz $\mathbf{A}$.

Ogólne twierdzenie mówi, że rozwiązania takich równań dane są w postaci $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\bar{\mathbf{x}}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$ jest stałą zespoloną, a $\bar{\mathbf{x}}$ jest stałym wektorem.

Podstawiając powyższe zgadnięcie do równania oscylatora harmonicznego otrzymujemy [uzupełnić]

11.4 Inne zagadnienia

Równania nieliniowe

Chaos deterministyczny w równaniach różniczkowych

Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe Pełna nazwa równań różniczkowych, które omawialiśmy do tej pory, to w istocie równania różniczkowe zwyczajne. Są jeszcze bardziej złożone równania różniczkowe, zwane cząstkowymi. Różnią się tym od zwyczajnych, że występują w nich pochodne cząstkowe. Pochodne cząstkowe to pochodne funkcji wielu zmiennych w kierunku jednej ze zmiennych.

Przykład: weźmy funkcję $f = f(x, y)$. Możemy ją zróżniczkować po x lub po y. Piszemy wtedy np.

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ldots$$

Teoria tych pochodnych nie jest wiele trudniejsza niż w jednym wymiarze, ale omówienie analizy wielowymiarowej jest istotnie bardziej złożone niż w jednym wymiarze, dlatego ją pomijamy.

Przykład równania różniczkowego cząstkowego w 3 wymiarach:

$$\lambda^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \tau \frac{\partial V}{\partial t}$$

(równanie dyfuzji, np. neuroprzekaźnika w przestrzeni synaptycznej).

11.5 Ćwiczenia

1. Wahadło.

   (a) zacznij od zerowego tłumienia i wymuszania. Co obserwujesz? Czy tego się należy spodziewać?

   (b) Co się dzieje kiedy dołożymy tłumienie? Jak kształt oscylacji zależy od siły tłumienia?

   (c) Co się dzieje, kiedy zaczniemy układ wymuszać? Przyjmij stałe parametry wahadła i tłumienia i eksperymentuj z wartościami amplitudy i częstości tłumienia. Co obserwujesz dla różnych parametrów? Przyjmujemy parametryzację:

$$\begin{aligned}
\omega &= 1, \\
\gamma &= 1/q, \qquad q = 2 \\
\Omega &= 2/3, \\
A &= 0.5 \quad \text{do} \quad 1.5
\end{aligned}$$

2. Równania Fitzhugh-Nagumo. Zbadaj jak częstość oscylacji zależy od wartości wstrzykiwanego prądu.

3. Równania Lotki-Volterry.

12 Procesy stochastyczne

Omówiliśmy modele ewolucji deterministycznej, czyli układy dynamiczne z czasem dyskretnym — iterowane funkcje — oraz układy dynamiczne z czasem ciągłym, czyli równania różniczkowe zwyczajne. W wielu sytuacjach jednak mamy do czynienia ze zjawiskami "losowymi", w których nawet koncepcyjnie trudno jest przewidywać precyzyjnie przyszły stan układu. Często jednak możemy budować dla takich sytuacji precyzyjne modele zmian prawdopodobieństwa tego, że układ znajdzie się w danym stanie. Modele takie nazywamy procesami stochastycznymi.

Proces stochastyczny nazywamy funkcję losową $X(t)$. Parametr t może być ciągły, np. $t \in \mathbb{R}$ lub $t \in \mathbb{R}_+$, lub dyskretny, np $t \in \mathbb{N}$. Przestrzeń stanów przyjmowanych przez zmienną losową w danym czasie może być również ciągła lub dyskretna. Najprostsze procesy stochastyczne to tak zwane łańcuchy Markowa. Zacznijmy od prostego przykładu.

Przykład 12.1: [The School Mathematics Project(1986–1988), vol. III, pp 410–412] Łańcuchy Markowa.

Ze stołówki pracowniczej każdego dnia korzysta 320 osób. Do obiadu można sobie wziąć albo herbatę albo kawę. Spośród tych, którzy pewnego dnia biorą herbatę, 10% decyduje się na wzięcie kawy następnego dnia. Niestety kawa jest gorsza: 40% spośród tych, którzy biorą ją pewnego dnia, decyduje się na zastąpienie jej herbatą w dniu następnym.

1. Jeśli w poniedziałek herbatę pije 160 osób i 160 osób pije kawę, to sprawdź za pomocą obliczeń, że we wtorek herbatę pije 208 osób, a kawę 112 osób. Oblicz ile osób pije herbatę i ile kawę w środę, czwartek i w piątek.

2. Czy proporcja wyrażająca pijących herbatę do pijących kawę wydaje się stabilizować? Czy można byłoby odgadnąć jaka byłaby to proporcja? Jaką liczbę herbat należałoby wtedy dostarczać?

3. W poniedziałek wektor spożycia $\begin{pmatrix} \text{herbata} \\ \text{kawa} \end{pmatrix}$ reprezentowany jest przez $\begin{pmatrix} 160 \\ 160 \end{pmatrix}$. Pokaż, że wtorkowy wektor spożycia równy jest
$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 160 \\ 160 \end{pmatrix}.$$
Wyjaśnij, jakie znaczenie mają poszczególne liczby macierzy
$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

4. Oblicz P^2, P^3 i $P^4 (= Q)$. Sprawdź, że w piątek wektor spożycia jest równy $Q \cdot \begin{pmatrix} 160 \\ 160 \end{pmatrix}$. Jak myślisz, czy P^n dąży do jakiejś granicy?

5. Wykaż, że jeżeli $U = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, to $PU = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} = U \cdot D$ (literą D oznaczyliśmy tę ostatnią macierz).

6. Jeżeli P zapiszemy jako UDU^{-1}, to czym jest P^n? Co jest granicą macierzy D^n, gdy $n \to \infty$? Co jest zatem granicą macierzy P^n, gdy $n \to \infty$? Czy zgadza się to z odpowiedziami do zadań 2 i 4?

7.Jeśli sytuacja po ustabilizowaniu się osiąga stan równowagi określony przez wektor $\begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$, to $P\begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$. Korzystając z tego równania oblicz wektor $\begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix}$; porównaj z zadaniem 6.

$\triangle$

Rozważmy układ, który ma kilka stanów, od 1 do n. Przypuśćmy, że prawdopodobieństwo p_{jk} przejścia ze stanu j do stanu k nie zależy od czasu w którym następuje przejście a jedynie od tego, w jakim stanie układ znajduje się aktualnie. Taki proces zmiany stanów nazywamy łańcuchem Markowa. Jeżeli

Gdybyśmy omówiony powyżej przykład potraktowali w sposób probabilistyczny, to jest przyjęli, że osoba biorąca herbatę w jednym dniu, z prawdopodobieństwem 10% weźmie kawę dnia następnego, itd., wówczas mamy do czynienia z łańcuchem Markowa.

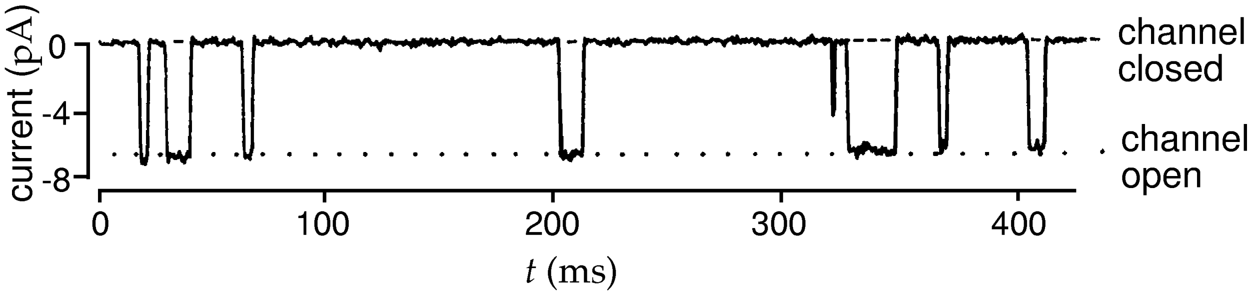
Rozważmy inny przykład łańcucha Markowa (procesu stochastycznego z czasem dyskretnym bez pamięci). Rozważmy cząsteczkę skaczącą po prostej. W czasie $t = 0$ cząsteczka znajduje się w punkcie $x = 0$. W każdym kolejnym kroku skacze o 1 w lewo lub w prawo z prawdopodobieństwem 1/2. Jeżeli przez Y_n oznaczymy zmienną losową oznaczającą przesunięcie cząsteczki w n-tym kroku, a przez X_n jej położenie po n krokach, to $X_0 = 0$, $X_n = X_{n-1} + Y_n$. Jeżeli zapytamy teraz o położenie cząsteczki w funkcji czasu, to jest ono funkcją losową, a więc określiliśmy znowu proces stochastyczny. Ponieważ położenie cząsteczki może się zmieniać tylko o 1 w każdym kroku, mamy do czynienie z procesem w czasie dyskretnym i z dyskretną przestrzenią stanów. Gdyby prawdopodobieństwo przesunięcia Y_n było dane rozkładem ciągłym, np. rozkładem Gaussa $P(Y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-Y_n^2/2\sigma^2]$, wówczas mielibyśmy do czynienia z procesem stochastycznym z czasem dyskretnym i ciągła przestrzenią stanów, gdyż położenie cząsteczki w czasie n przyjmowałoby dowolne wartości z $\mathbb{R}$. Procesy opisujące takie skaczące cząstki nazywamy błądzeniem przypadkowym, po angielsku *random walks*. Używane są jako modele koncepcyjne wielu zjawisk, np. zmiany potencjału błonowego na skutek pobudzania przez wiele wejść od innych komórek można modelować jako błądzenie przypadkowe (aktywne wejście pobudzające — depolaryzacja, wejście hamujące — hiperpolaryzacja).

Jeżeli liczba stanów procesu nie jest skończona, albo proces zachodzi w czasie ciągłym, ale dalej prawdopodobieństwo zmiany stanu zależy wyłącznie od stanu obecnego (nie zależy od historii), będziemy mówić nie o łańcuchu, ale o procesie Markowa. Łańcuchy Markowa są szczególnym przypadkiem procesów Markowa. Błądzenie przypadkowe z gaussowskim rozkładem przejścia jest przykładem procesu Markowa. Innym przykładem obserwowanym w przyrodzie jest proces losowego otwierania i zamykania się kanałów jonowych w błonie komórkowej. W danej chwili każdy kanał jest albo otwarty, albo zamknięty. Płynący przez niego prąd wynosi $\bar{g}P(V - E)$, gdzie E jest potencjałem odwrócenia, $\bar{g}$ jest przewodnością otwartego kanału, P określa stan kanału — zamknięty (0) lub otwarty (1), V to potencjał błonowy.

Kiedy mamy populację kanałów o takich samych własnościach, z których każdy otwiera i zamyka się niezależnie od pozostałych, prąd płynący przez błonę jest proporcjonalny do liczby otwartych kanałów N i wynosi

$$I = N\bar{g}(V - E).$$

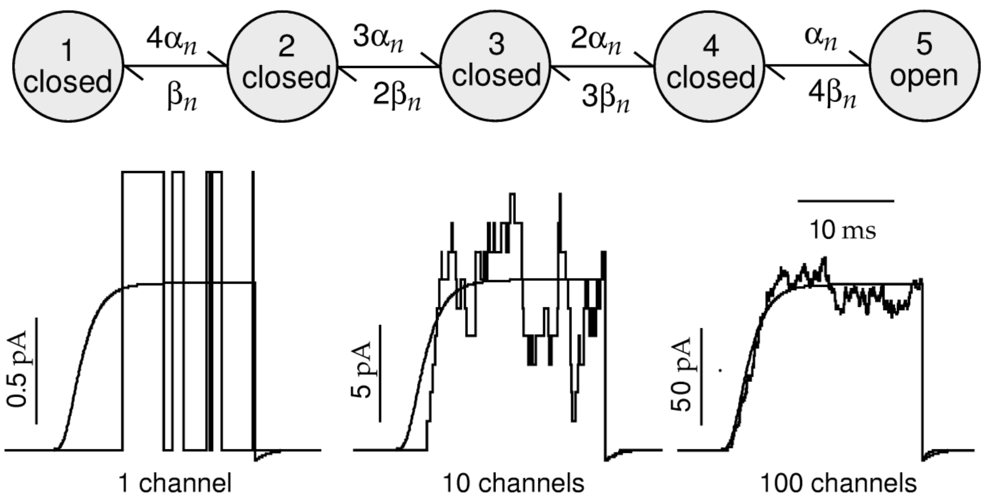
Liczba otwartych kanałów w każdej chwili czasu jest zmienną losową, zatem $N(t)$ jest funkcją losową. Jeżeli wielokrotnie powtórzymy doświadczenie lub symulację, za każdym razem



Rysunek 6: Otwieranie i zamykanie się kanału jonowego w błonie komórkowej(Hille 1992, za Dayanem i Abbottem, rozdz. 5, rys. 7).

dostaniemy inny przebieg tej funkcji. Takie pojedyncze przebiegi nazywamy realizacjami procesu stochastycznego albo funkcjami próbnymi.

Dla ustalenia uwagi rozważmy jeden z najprostszych kanałów jonowych, kanał potasowy K^+. Ten kanał składa się z 4 podjednostek (bramek) i otwarty jest tylko wtedy, kiedy wszystkie 4 bramki są otwarte. Czyli mamy pięć stanów kanału numerowanych liczbą otwartych bramek od 0 do 4 (+1). Opisać dynamikę takiego kanału możemy przy pomocy równań



Rysunek 7: Prąd płynący przez błonę komórkową przy rosnącej liczbie kanałów jonowych (Dayan i Abbott, rozdz. 5, rys. 12). [Docelowo zmienić na własny.]

kinetycznych na prawdopodobieństwa p_k znalezienia układu w danym stanie k (patrz rysunek 7):

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= \beta_n p_2 - 4\alpha_n p_1 \\
\dot{p}_2 &= 4\alpha_n p_1 + 2\beta_n p_3 - (\beta_n + 3\alpha_n) p_2 \\
\dot{p}_3 &= 3\alpha_n p_2 + 3\beta_n p_4 - (2\beta_n + 2\alpha_n) p_3 \\
\dot{p}_4 &= 2\alpha_n p_3 + 4\beta_n p_5 - (3\beta_n + \alpha_n) p_4 \\
\dot{p}_5 &= \alpha_n p_4 - 4\beta_n p_5.
\end{aligned}
$$

Tylko kiedy kanał znajduje się w stanie 5 przewodzi prąd. W praktyce możemy tu również modelować otwieranie i zamykanie się populacji bramek

$$\dot{n} = \beta_n(1-n) - \alpha_n n$$

Wtedy prawdopodobieństwo otwarcia kanału (przy założeniu niezależności bramek) wynosi n^4 i odpowiada to p_5 (analogicznie $p_1 = (1-n)^4$, itd.).

Kiedy liczba kanałów w modelowanym/badanym kawałku błony rośnie, wówczas prąd wyliczany z równań

$$\begin{aligned} I &= n^4 \bar{g}(V-E) \\ \dot{n} &= \beta_n(1-n) - \alpha_n n \end{aligned}$$

jest coraz bliższy rzeczywistemu prądowi

$$I = N\bar{g}(V-E).$$

To był przykład procesu stochastycznego z czasem ciągłym i dyskretną przestrzenią stanów (P — kanał otwarty lub zamknięty; liczba otwartych bramek od 0 do 4; liczba otwartych kanałów od 0 do $N_{\max}$).

Typowe pytania w badaniu procesów stochastycznych dotyczą wartości średnich. Każda realizacja takiego procesu, czy obserwacja jednego przebiegu w przyrodzie, jest różna od kolejnej. Dlatego wartości średniego stanu, typowego odchylenia od średniego stanu, itd., w ogólności badanie rozkładów prawdopodobieństwa stanów w danej chwili czasu, jest najpraktyczniejszą informacją jaką możemy dostać.

Na zakończenie rozważmy najprostszy przykład procesu punktowego zwanego procesem Poissona. Procesy punktowe to takie procesy, których realizacje składają się ze zbiorów dyskretnych zdarzeń w czasie lub przestrzeni. Mogą to być na przykład czasy rozpadu cząsteczek w próbce materiału radioaktywnego, czasy wyładowań (iglic) komórki nerwowej, czasy kolejnych połączeń klientów z biurem obsługi klienta, albo położenia na mapie centrów trzęsień ziemi.

Proces Poissona określamy przez stałą λ, o wymiarze $[t]^{-1}$, nazywaną częstością generacji zdarzeń. Niech $N(t_1, t_2)$ będzie liczbą wszystkich zdarzeń w czasie od t_1 do t_2, czyli $N(t, t+\Delta t)$ jest liczbą zdarzeń w czasie Δt po czasie t. Proces Poissona to taki proces stochastyczny, który spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} \mathrm{prob}(N(t, t+\Delta t) = 0) &= 1 - \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t) \\ \mathrm{prob}(N(t, t+\Delta t) = 1) &= \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t) \\ \mathrm{prob}(N(t, t+\Delta t) > 1) &= o(\Delta t) \end{aligned}$$

Wyrażenie $o(\Delta t)$ oznacza funkcje zbiegające do 0 szybciej niż Δt (dla nas: pomijalne). Zakładamy też, że $N(t, t+\Delta t)$ nie zależy od wydarzeń w czasie przed t.

Nazwa proces Poissona bierze się stąd, że w dowolnym przedziale czasu $(t, t+h]$ liczba zdarzeń ma rozkład Poissona o średniej $\lambda \cdot h$. Rozkład Poissona dany jest wzorem $P_\lambda(n) = \frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$. [Rysunek] Z kolei rozkład przedziałów między kolejnymi wydarzeniami jest wykładniczy: $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Przykład: teoria kolejek (call center).

Popularnym procesem stochastycznym definiowanym przez średnie własności w danym czasie i przez korelacje jest biały szum. Jest to proces $\eta(t)$, którego wartość średnia (po realizacjach) w każdym czasie jest 0:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0$$

a korelacje między czasami są 0 dla różnych czasów i σ^2 dla tego samego czasu:

$$\begin{aligned} \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 0 \\ \langle \eta(t)^2 \rangle &= \sigma^2 \end{aligned}$$

σ opisuje wielkość fluktuacji. Charakterystyczną cechą białego szumu jest płaskie widmo mocy

$$F(\omega) = \int d\tau \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} = \sigma^2.$$

13 Analiza fourierowska

13.1 Szeregi Fouriera

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest okresowa o okresie $2l$, tzn. $f(x) = f(x+2l)$ dla dowolnego x. Wystarczy wówczas znać wartości tej funkcji na przedziale o długości $2l$, np. $x \in [-l, l]$.

Zdefiniujmy następujące współczynniki a_n, b_n:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

O wspólczynnikach a_n, b_n można myśleć jako o *współczynnikach rozkładu* funkcji $f(x)$ w bazie złożonej z coraz bardziej zagęszczonych sinusów i kosinusów.

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła[1], to możemy ją przybliżać, biorąc kombinacje liniowe kolejnych, coraz bardziej zagęszczonych, sinusów i kosinusów. Ściśle rzecz biorąc jest wówczas zbieżny następujący szereg:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) . \tag{4}$$

Szereg ten nazywamy *szeregiem Fouriera* funkcji $f(x)$.

Jeśli funkcja $f(x)$ jest parzysta, to $b_n = 0$, zaś jeśli jest nieparzysta, to $a_n = 0$.

Równanie 4 można zapisać w zwięźlejszej postaci, używając symbolu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} .$$

W tym równaniu współczynniki c_n są liczbami zespolonymi zdefiniowanymi jako

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx .$$

Zespolone współczynniki c_n niosą tę samą informacje co rzeczywiste a_n i b_n. Zachodzą między nimi związki:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Wielkość $A_n = 2|c_n| = a_n^2 + b_n^2$, zdefiniowaną dla $n \geqslant 0$, nazywamy amplitudowym widmem mocy (czasami definiuje się je bez czynnika 2). Wielkość ta mówi, jak silna jest składowa o danej częstości.

[1] W istocie wystarczy, aby $f(x)$ spełniała pewne słabsze warunki, które mówią, czy jest „wystarczająco porządna”.

13.2 Transformata Fouriera

Powyższe rozważania dotyczą funkcji okresowych. Okazuje się jednak, że można je uogólnić na funkcje, które nie są okresowe. Można zdefiniować operację — transformatę Fouriera — która niekoniecznie okresowej funkcji $f(x)$ przypisuje funkcję $F(k)$. Funkcja $F(k)$ jest uogólnieniem współczynników c_n szeregu Fouriera.

13.3 Dyskretna transformata Fouriera

W praktycznej analizie sygnałów mamy najczęściej do czynienia ze skończonym ciągiem danych (wartości pomiarów) $h_0, h_1, h_2, \ldots h_{N-1}$; mogą to być np. wartości sygnału spróbkowanego z określoną częstością. Również i w tym przypadku można zastosować analizę fourierowską, to znaczy rozłożyć ciąg danych w bazie funkcji oscylujących. Odpowiednie wzory mają postać:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \; ,$$

$$h_n = \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{\frac{2\pi ikn}{N}} \; .$$

Pierwszy z powyższych wzorów można interpretować jako obliczanie współczynników rozkładu (analogicznych do c_n), zaś drugi — jako składanie wyjściowego wektora danych h_n z wektorów bazowych $e^{\frac{2\pi ikn}{N}}$ ze współczynnikami H_k. Moduł współczynników H_k jest związany z amplitudowym widmem mocy sygnału[2].

[2]Uwaga: obliczenie po prostu $|H_k|$ jest zwykle *złym* sposobem szacowania zawartości danej częstości w sygnale.

Funkcja δ Diraca

Część IV
Na razie odłożone

Odwrotność odwzorowania liniowego i związane wyniki. Związki z wyznacznikami poniżej!

Wyznaczniki. Potrzebne do wielomianu charakterystycznego. Wartości i wektory własne można wprowadzić niezależnie? Przy wielowymiarowym całkowaniu do zamiany zmiennych. Jeżeli wprowadzać, to pewnie w 2 i 3 wymiarach. Przy ogólnej definicji musimy powiedzieć coś o grupie permutacji? Ewentualnie przez rozwinięcie Laplace'a?

14 *Struktura odwzorowania liniowego

Wektory i wartości własne operatora (macierzy). [Twierdzenie Cayleya-Hamiltona. Kanoniczna postać jordanowska macierzy.]

Zasadniczo kluczowe pojęcia, ale można je odłożyć do układów liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu (?).

15 *Przestrzenie dualne?

Formy biliniowe? kwadratowe?

16 Przestrzenie z iloczynem skalarnym

Iloczyn skalarny i metryka – kluczowe pojęcia. *Przestrzenie unitarne?

17 Ciągi i szeregi funkcyjne

Szereg Taylora. Rozdział 7,8 Rudin

18 Funkcje wielu (np. dwóch) zmiennych

Rozdział 9 Rudina do (bez!) form różniczkowych.

19 Liczby zespolone 2

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna. Funkcje trygonometryczne. Szeregi Fouriera. Rozdział 8 Rudin

20 Notatki

PU - skrypt Pawła Urbańskiego do Algebry

Zadania, seria 1

Termin oddania: 16.10.2007
Należy oddać rozwiązane zadania nr 1(b,e,f), 2(a lub b, c lub d), 4, 5, 8b, 9 (a,c)

1. Rozwiąż tam gdzie to możliwe: (i) w liczbach naturalnych, (ii) w liczbach całkowitych (iii) w liczbach wymiernych następujące równania:
   (a) $3x + 1 = 4$
   (b) $3x + 10 = 4$
   (c) $3x + 11 = 15$
   (d) $x^2 = 16$
   (e) $9x^2 = 16$
   (f) $7x^2 = 16$
2. Niech $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 3 - 2i$, $z_4 = -5i$. Policz
   (a) $z_1 + z_2$
   (b) $z_3 + z_4$
   (c) $z_1 z_2$
   (d) $z_3 z_4$
   (e) z_2^2
   (f) z_3^3
   (g) $z_1 + z_3$
   (h) $z_1 z_3$
3. Znajdź liczbę zespoloną $a + bi$ taką, że $(a + bi)(3 - 2i) = 1$.
4. Znajdź rozwiązanie równania $(3 - 2i)z = 5 + i$.
5. Przedstaw $\dfrac{2-i}{3+4i}$ w postaci $c + di$.
6. Dla liczb zespolonych z zadania 2 oblicz z_1/z_2, z_1/z_3, z_3/z_4. Wyniki podaj w postaci $c + di$.
7. Jeśli $a + bi = c + di$, gdzie a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to $a - c = i(b - d)$ oraz $(a - c)^2 = -(d - b)^2$. Co można z tego wywnioskować?
8. Jak wiemy, suma pierwiastków rzeczywistych równania $ax^2 + bx + c = 0$ wynosi $-\frac{b}{a}$ a ich iloczyn $\frac{c}{a}$. Rozwiąż następujące równania i w każdym przypadku znajdź sumę i iloczyn odpowiadających im pierwiastków. Czy dla pierwiastków zespolonych powyższe wzory też mają zastosowanie?
   (a) $x^2 + 7 = 0$
   (b) $x^2 + 4x + 29 = 0$
   (c) $x^2 + 6x + 4 = 0$

(d) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

(e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

9. Znajdź równania kwadratowe o pierwiastkach

   (a) $6 + 2i, 6 - 2i$

   (b) $3i + 4, 3i - 4$

   (c) $5 - 3i, 2 - 7i$

   (d) $1 - 4i, 1 + 4i$

10. Jeżeli $a + bi$ jest jednym z pierwiastków równania kwadratowego o współczynnikach rzeczywistych, to co można powiedzieć o drugim pierwiastku?

11. Dowieść tożsamości

$$z^2 + 4 = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 + i)(z + 1 - i)$$

12. Dla jakich liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$\frac{(x-4) + (y-1)i}{1+i} = 2 - 5i$$

Zadania, seria 2

Termin oddania: 23.10.2007
Należy oddać rozwiązane zadania nr 1, 2, 3(a,d).

1. Obliczyć (wszystkie) pierwiastki czwartego stopnia z liczby zespolonej $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$. Uwaga: wynik można zapisać używając funkcji sin i cos.

2. Niech funkcja $f : [0, 1] \to [1, 2]$ (określona na przedziale $[0, 1]$ i przyjmująca wartości również w przedziale $[1, 2]$) będzie dana wzorem $f(x) = x^2 + 1$. Czy funkcja ta jest surjekcją? iniekcją? bijekcją? Jakim wzorem będzie dana funkcja, której wykres jest przesunięty o $a = 3$ w lewo od wykresu funkcji f?

3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

   (a) $u_n = \frac{n}{n+1}$

   (b) $u_n = \frac{4n-3}{6-5n}$

   (c) $u_n = \frac{n^2-1}{3-n^3}$

   (d) $u_n = \frac{3}{n} - \frac{5}{\sqrt{n}}$

   (e) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$

   (f) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$

4. Obliczyć granicę ciągu. Wskazówka: skorzystać z wzoru $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

   (a) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

   (b) $u_n = \sqrt{n + 2} - \sqrt{n}$

5. Udowodnić, że ciąg $u_n = \frac{n!}{n^n}$ jest zbieżny do zera.

Zadania, seria 3

Termin oddania: 20.11.2007
Należy oddać rozwiązane zadania nr 1, 3, 4, 5.

1. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$$
2. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$$
3. Obliczyć pochodne funkcji:
   (a) x^3+2x^2-3x+4
   (b) $2\sqrt{x}+\sin x-\cos x$
   (c) $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$
   (d) $\frac{1}{2+\sin x}$
4. Obliczyć całkę nieoznaczoną:
$$\int\left(5x^2-6x+3+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$
5. Obliczyć pole figury ograniczonej osią x, prostymi $x=2$ i $x=4$ oraz wykresem funkcji $y=x^3-2$.

Zadania, seria 4

Termin oddania: 18.12.2007

1. Rozważmy przestrzeń wektorową wielomianów stopnia co najwyżej 2. Który z poniższych dwóch zestawów wektorów jest bazą tej przestrzeni?

$$e_1 = x\ , \qquad e_2 = x + 5\ , \qquad e_3 = x^2 + 1$$

$$f_1 = x\ , \qquad f_2 = x + 5\ , \qquad f_3 = x - 5$$

   Zapisać wektor $P(x) = 3x^2 - 2x + 7$ w tej bazie.

2. Obliczyć iloczyn macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Wykonać działanie:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Zapisać układ równań w postaci macierzowej i rozwiązać go, znajdując macierz odwrotną:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 5x - y &= 9 \end{aligned}$$

   Jakie będzie rozwiązanie, jeśli po prawej stronie zamiast 7 będzie 5, a zamiast 9 będzie 3? A jeśli zastąpimy je dowolnymi liczbami a i b?

Materiały do egzaminu

Lista pojęć, które trzeba znać, rozumieć i umieć stosować oraz elementarne pytania. Do każdego pojęcia należy znać ilustrujący je przykład.

- liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne, rzeczywiste, zespolone, ich symbole, w jakim zbiorze można rozwiązać dane równanie kwadratowe, działania w zbiorze liczb zespolonych $(+, -, \cdot, /)$, własności tych działań, część rzeczywista, urojona liczby, liczba sprzężona, moduł, argument liczby, interpretacja liczb zespolonych jako punktów na płaszczyźnie, pierwiastki z jedynki (liczbowo i geometrycznie).

- co to jest funkcja, odwzorowanie, dziedzina, przeciwdziedzina funkcji, wykres funkcji, monotoniczność, funkcja rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca, okresowa, parzysta, nieparzysta, podać przykłady na te własności, przekształcenia wykresów — przesunięcia w prawo, lewo, górę, dół; skalowanie, obraz funkcji, przeciwobraz, bijekcja, surjekcja, injekcja, f. różnowartościowa, f. odwrotna, jak narysować wykres funkcji odwrotnej mając dany wykres funkcji, na jakim zbiorze można określić funkcję odwrotną, relacje, równoliczność zbiorów, moc zbioru, moz zbiorów nieskończonych.

- co to jest ciąg, ciąg liczbowy, czy może być ciąg nieliczbowy? przykład, granica ciągu, ciąg zbieżny, rozbieżny, twierdzenie o trzech ciągach, podciągi, granica podciagu, granica górna i dolna, punkt skupienia, szereg, szereg zbieżny, szereg geometryczny, kryteria zbieżności (d'Alemberta, Raabego), zbieżność warunkowa i bezwzględna, kryteria zbieżności szeregów, liczba e.

- granica lewo-, prawostronna funkcji, granica funkcji, granice nieskończone, granice w nieskończoności, granice funkcji od dwóch funkcji $(f \pm g, f \cdot g, f/g, f(g(x)))$, funkcja ciągła w punkcie, na zbiorze, funkcja ciągła, rodzaje nieciągłości.

- co to jest różniczkowanie, pochodna w punkcie, interpretacja geometryczna, współczynnik kierunkowy prostej, funkcja pochodna, różniczkowalność a ciągłość, przykład funkcji ciągłej ale nieróżniczkowalnej, pochodne funkcji elementarnych, pochodne funkcji od dwóch funkcji $(f \pm g, f \cdot g, f/g, f(g(x)))$, pochodne wyższych rzędów, przykład, notacja $\dot{f}$, f', $\frac{df}{dt}$, $f^{(n)}$, $\frac{d^n f}{dt^n}$; funkcja ciągła, różniczkowalna, różniczkowalna n-krotnie, gładka.

- całka z funkcji na przedziale, interpretacja geometryczna, konstrukcja całki, zamiana granic całkowania, całkowanie funkcji o zmiennym znaku, związek całki z pochodną, funkcja pierwotna, całka nieoznaczona, całka nieoznaczona a oznaczona, własności całek nieoznaczonych, całki z funkcji elementarnych, zastosowania geometryczne całki: obliczanie objętości brył, długości łuku; całkowanie przez części i przez podstawienie, całkowanie funkcji nieograniczonych, całkowanie po nieskończonym zbiorze,

Literatura

[The School Mathematics Project(1986–1988)] The School Mathematics Project, ed., *Matematyka w Szkole Średniej* (Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1986–1988).