Elementy matematyki, wykład 5

Pochodna funkcji

Daniel Wójcik

Szymon Łęski

d.wojcik@nencki.gov.pl
s.leski@nencki.gov.pl

http://www.neuroinf.pl/Members/szleski/swps/
http://www.neuroinf.pl/Members/danek/homepage/swps/matematyka_wyklad_html/

Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

Granica funkcji w punkcie

Przypomnienie:

Definicja 4.1 *Powiemy, że* granicą funkcji $f(x)$ w punkcie p jest q, *co zapisujemy*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad \text{lub} \qquad f(x) \to q \text{ dla } x \to p,$$

jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że*

$$|f(x) - q| < \varepsilon$$

kiedy x *spełnia*

$$0 < |x - p| < \delta.$$

Granica funkcji — równoważna definicja

Przypomnienie:
Twierdzenie 4.2

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$$

dla każdego ciągu $\{p_n\}$ *takiego, że*

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

Ciągłość funkcji

Przypomnienie:

Definicja 4.3 *Powiemy, że f jest ciągła w punkcie p, jeżeli istnieje granica $\lim_{x\to p} f(x)$ i jest ona równa $f(p)$. Jeżeli f jest ciągła w każdym punkcie zbioru X to mówimy, że f jest ciągła na X.*

Przykłady funkcji ciągłych

Następujące funkcje są ciągłe:

- funkcja stała $f(x) = c$
- funkcje wielomianowe, np.: $f(x) = 3x + 7$, $f(x) = 5x^3 + x^2 + 2$
- funkcje wymierne, to znaczy ilorazy wielomianów, np.: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$
- funkcje trygonometryczne ($\sin$, $\cos$ itd.)
- funkcja logarytmiczna i wykładnicza

Definicja pochodnej w punkcie

Iloraz

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h. (h może być ujemne)

Definicja 5.1 *Załóżmy, że iloraz różnicowy ma granicę przy* $h \to 0$*. Wówczas granicę tę nazywamy* pochodną funkcji f w punkcie x_0 *i oznaczamy* $f'(x_0)$*:*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Przykład 1

Dla przykładu obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$.

Iloraz różnicowy:

$$\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4$$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Przypomnienie: dla funkcji liniowej $ax + b$ współczynnik a nazywamy *współczynnikiem kierunkowym*. Jest on równy tangensowi kąta jaki tworzy ta prosta z osią x.

Iloraz różnicowy jest współczynnikiem kierunkowym *siecznej*.

W granicy $h \to 0$: pochodna funkcji w punkcie jest współczynnikiem kierunkowym *stycznej*.

[Rysunek, równanie stycznej do paraboli]

Przykład 2

Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie x_0. Iloraz różnicowy:

$$\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2) = 3x_0^2$$

Przykład 3

Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie x_0. Iloraz różnicowy:

$$\frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{-1}{x_0(x_0+h)}$$

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Interpretacja fizyczna pochodnej

Niech t będzie czasem, a funkcja $y = f(t)$ niech oznacza położenie pewnego punktu (np. samochodu) wzdłuż osi (np. odległość wzdłuż drogi). [Rysunek]

Wówczas iloraz różnicowy

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

to prędkość średnia. (Jak ją mierzyć?)

Pochodna f w punkcie t_0 to wówczas prędkość chwilowa (pokazywana przez szybkościomierz) w chwili t_0.

Różniczkowalność a ciągłość

Różniczkowalność: mówimy, że funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkce x_0, jeżeli w tym punkcie istnieje jej pochodna.

Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest też w tym punkcie ciągła:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Istnieją jednak funkcje ciągłe, które nie są różniczkowalne.

Różniczkowalność — przykład 1

Niech $f(x) = |x|$ [wykres]. Ta funkcja jest ciągła, ale w punkcie $x_0 = 0$ nie jest różniczkowalna.

Iloraz różnicowy:

$$\frac{|0+h|-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \pm 1$$

Nie istnieje granica ilorazu różnicowego w $h = 0$ (chociaż istnieje granica lewostronna i granica prawostronna).

Pochodna jako funkcja

Do tej pory zajmowaliśmy się pochodną funkcji w jednym punkcie.

Teraz załóżmy, że mamy funkcje $f(x)$, która jest różniczkowalna w każdym punkcie. Możemy wówczas każdej wartości x przyporządkować wartość pochodnej f w tym punkcie:

$$x \mapsto f'(x)$$

Dostajemy w ten sposób nową funkcję, którą nazywamy pochodną funkcji f.
Na przykład:

$$f(x) = x^2 \,, \qquad f'(x) = 2x \,.$$

Obliczanie pochodnej

Jak obliczać pochodną? Można korzystać z definicji, ale w praktyce korzystamy ze znanych pochodnych podstawowych funkcji oraz reguł ich łączenia.

Pochodne podstawowych funkcji:

Funkcja $f(x) = \dots$	Pochodna $f'(x) = \dots$
C	0
x^n, $n \geqslant 1$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Obliczanie pochodnej (2)

Pochodna sumy (różnicy) funkcji:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Pochodna iloczynu funkcji:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

Pochodna ilorazu funkcji:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Przykłady 1

$$y = x^2 + 3\,, \qquad y' = 2x + 0 = 2x$$

$$y = 5x^4\,, \qquad y' = 5(x^4)' = 20x^3$$

$$y = \frac{1}{x}\,, \qquad y' = \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{2x}{x+1}\,, \qquad y' = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y = \operatorname{tg} x\,, \qquad y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \ldots = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Pochodna funkcji złożonej

Niech $F(x) = f(g(x))$, na przykład:

$$g(x) = 5x\ , \qquad f(x) = \cos(x)\ ,$$

$$F(x) = \cos(5x)$$

Wówczas $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$(\cos(5x))' = -\sin(5x) \cdot (5x)' = -5\sin(5x)$$

Przykład 2

Obliczymy pochodną funkcji $F(x) = \frac{1}{2x+5}$.
Pierwszy sposób (pochodna ilorazu):

$$F'(x) = \frac{(1)'(2x+5) - 1 \cdot (2x+5)'}{(2x+5)^2} = \frac{-2}{(2x+5)^2}$$

Drugi sposób (pochodna funkcji złożonej)

$$F(x) = f(g(x)) , \quad g(x) = 2x+5 , \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = \underbrace{\frac{-1}{(2x+5)^2}}_{f'(g(x))} \cdot (2x+5)' = \frac{-2}{(2x+5)^2}$$

Pochodna drugiego rzędu

Wiemy, że z funkcji $f(x)$ możemy uzyskać pochodną (funkcję) $f'(x)$. Czy możemy ten proces kontynuować? Tak, możemy obliczyć pochodną pochodnej:

$$(f'(x))' = f''(x)$$

czyli drugą pochodną (podobnie: trzecią, czwartą, . . .). Pierwsza pochodna ma interpretację prędkości, a druga — przyspieszenia.

Przykład

Kulka poruszająca się na sprężynce.

Położenie:

$$y(t) = A\sin(t)$$

Prędkość:

$$y'(t) = A\cos(t)$$

Przyspieszenie:

$$y''(t) = -A\sin(t)$$

Notacja

Pochodną zapisuje się na różne sposoby:

$$f'(x)\ , \qquad f'\ , \qquad \dot{f}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\ , \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

Pochodne wyższych rzędów:

$$f''(x)\ , \qquad \ddot{f}(t)\ , \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

$$f^{(n)}(x)\ , \qquad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

Funkcje gładkie

Niektóre funkcje da się różniczkować „w nieskończoność”, to znaczy istnieją pochodne dowolnie wysokich rzędów. O takich funkcjach mówimy, że są gładkie.

Przykład funkcji gładkiej: $\sin(x)$.

Przykład funkcji różniczkowalnej, ale nie gładkiej:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}, \qquad f'(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases} = |x|$$

Różniczkowalność — przykład 2

Przykład patologiczny: istnieją funkcje ciągłe, których nie da się zróżniczkować *w żadnym punkcie*!