Elementy matematyki, wykład 6

Całki

Daniel Wójcik

Szymon Łęski

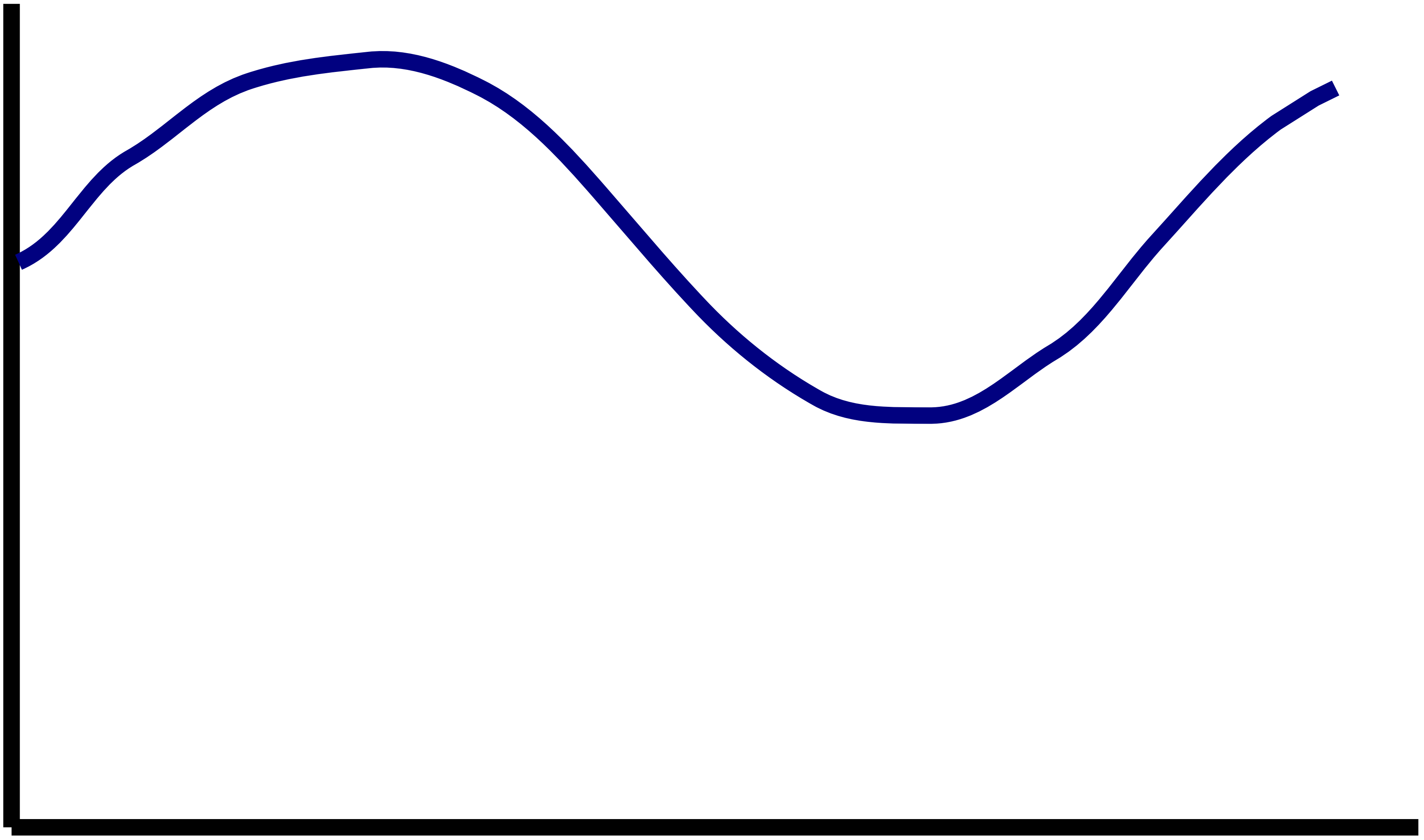
d.wojcik@nencki.gov.pl
s.leski@nencki.gov.pl

http://www.neuroinf.pl/Members/szleski/swps/
http://www.neuroinf.pl/Members/danek/homepage/swps/matematyka_wyklad_html/

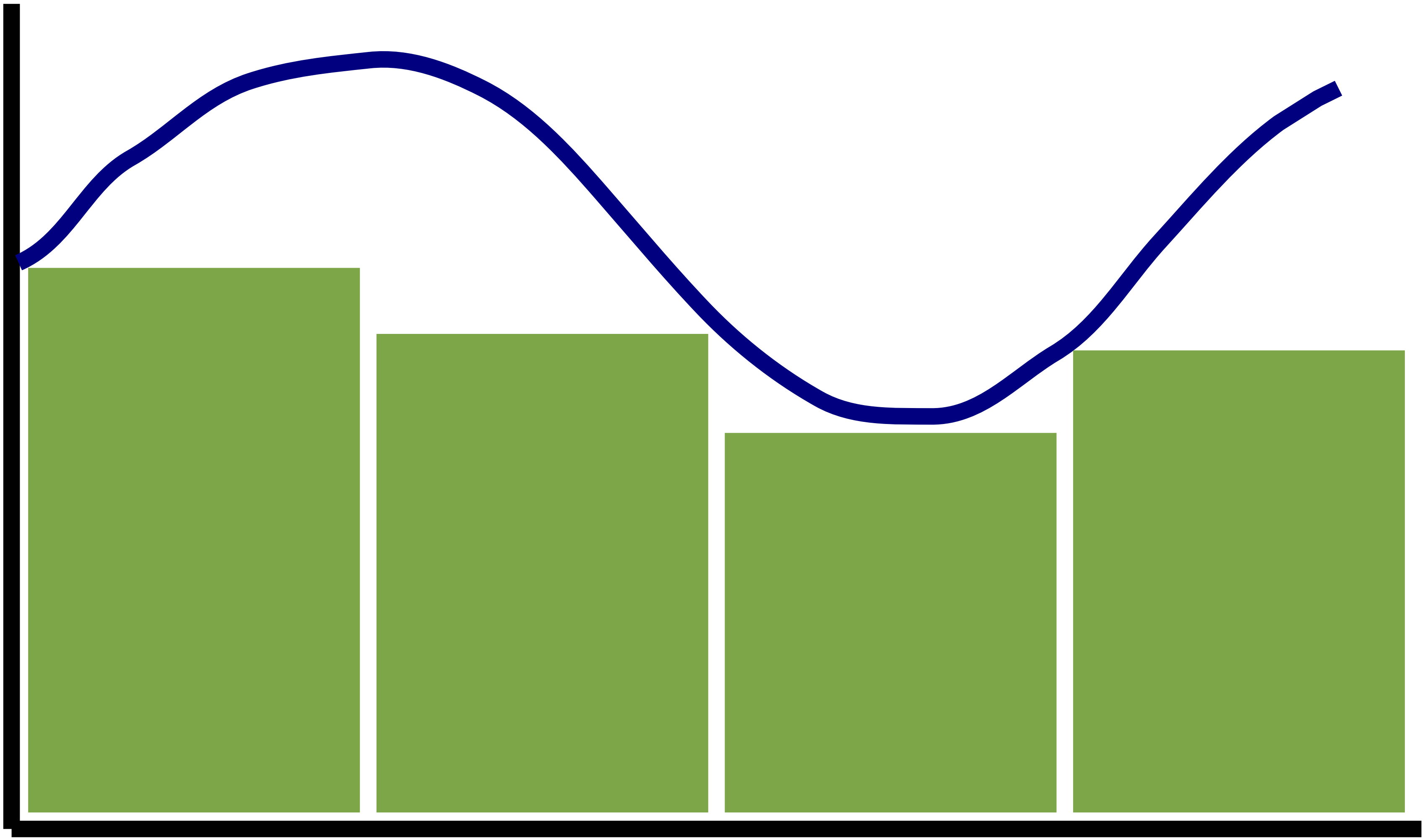
Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

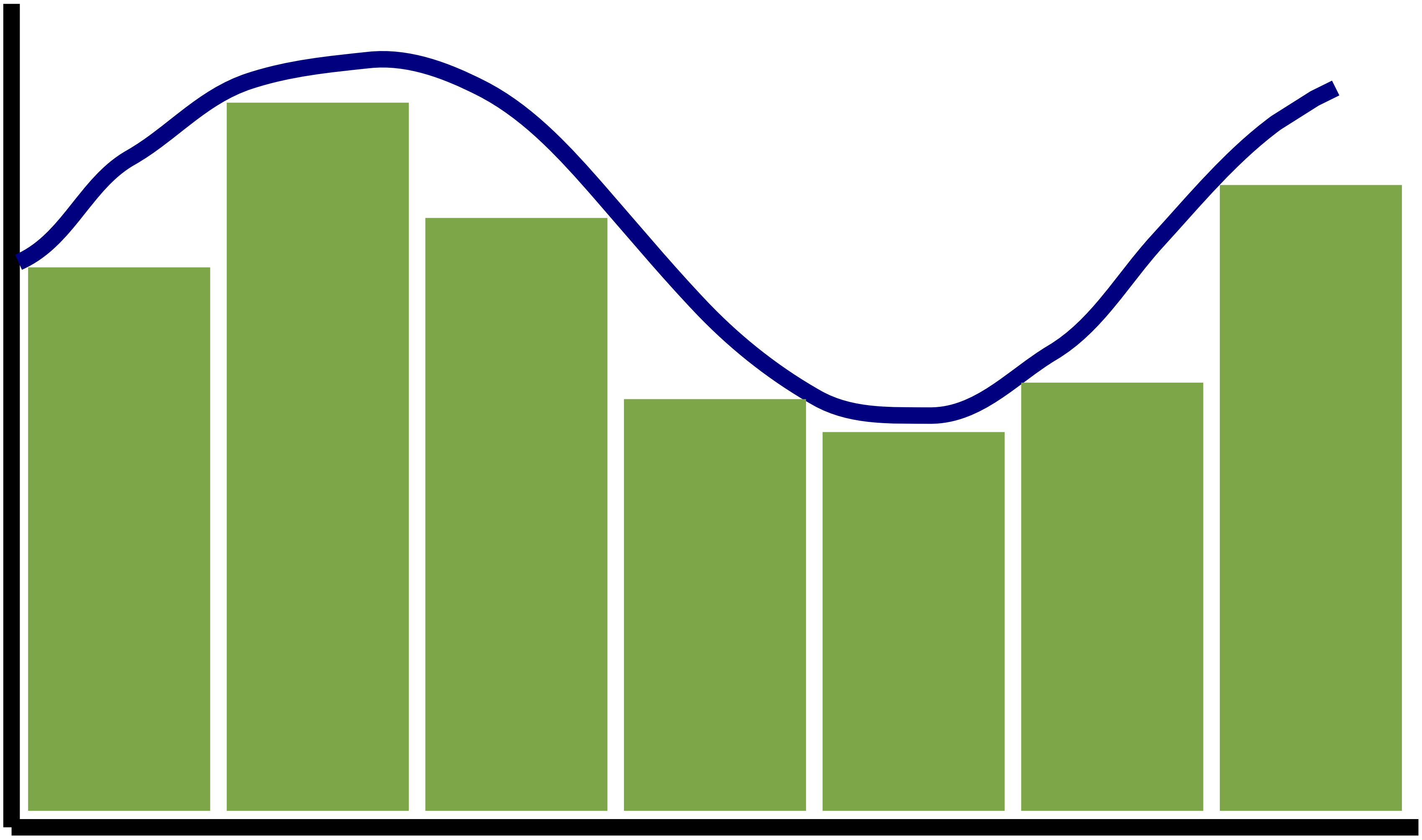
Przykład — pole pod wykresem



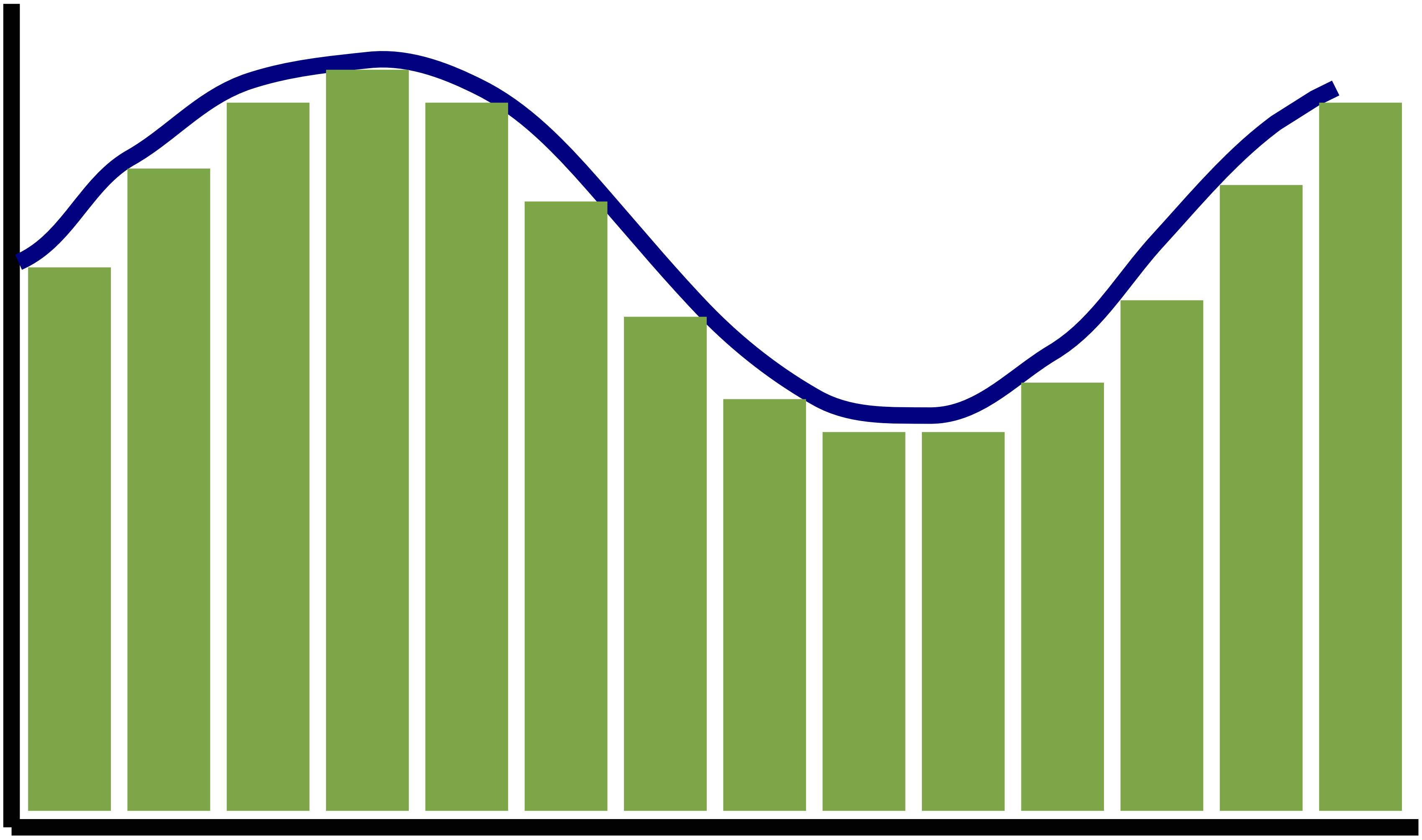
Przykład — pole pod wykresem



Przykład — pole pod wykresem



Przykład — pole pod wykresem

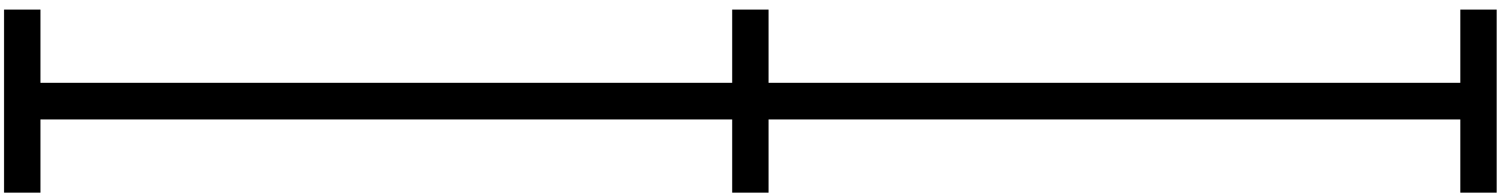


Podziały odcinka

Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a, b]$, ograniczoną.
Przedział $[a, b]$ możemy dzielić na coraz to mniejsze przedziały:

Podziały odcinka

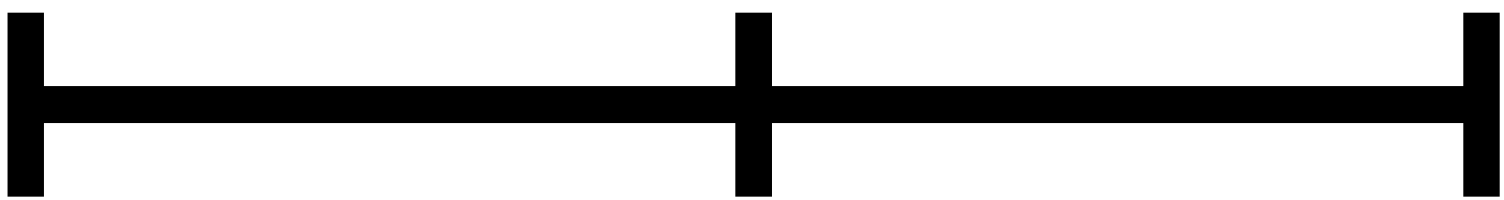
Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a, b]$, ograniczoną.
Przedział $[a, b]$ możemy dzielić na coraz to mniejsze przedziały:

P_1: 

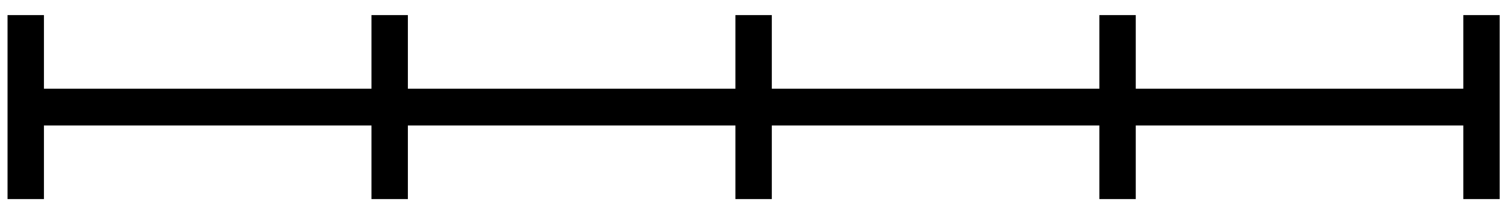
Podziały odcinka

Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a,b]$, ograniczoną.
Przedział $[a,b]$ możemy dzielić na coraz to mniejsze przedziały:

P_1:

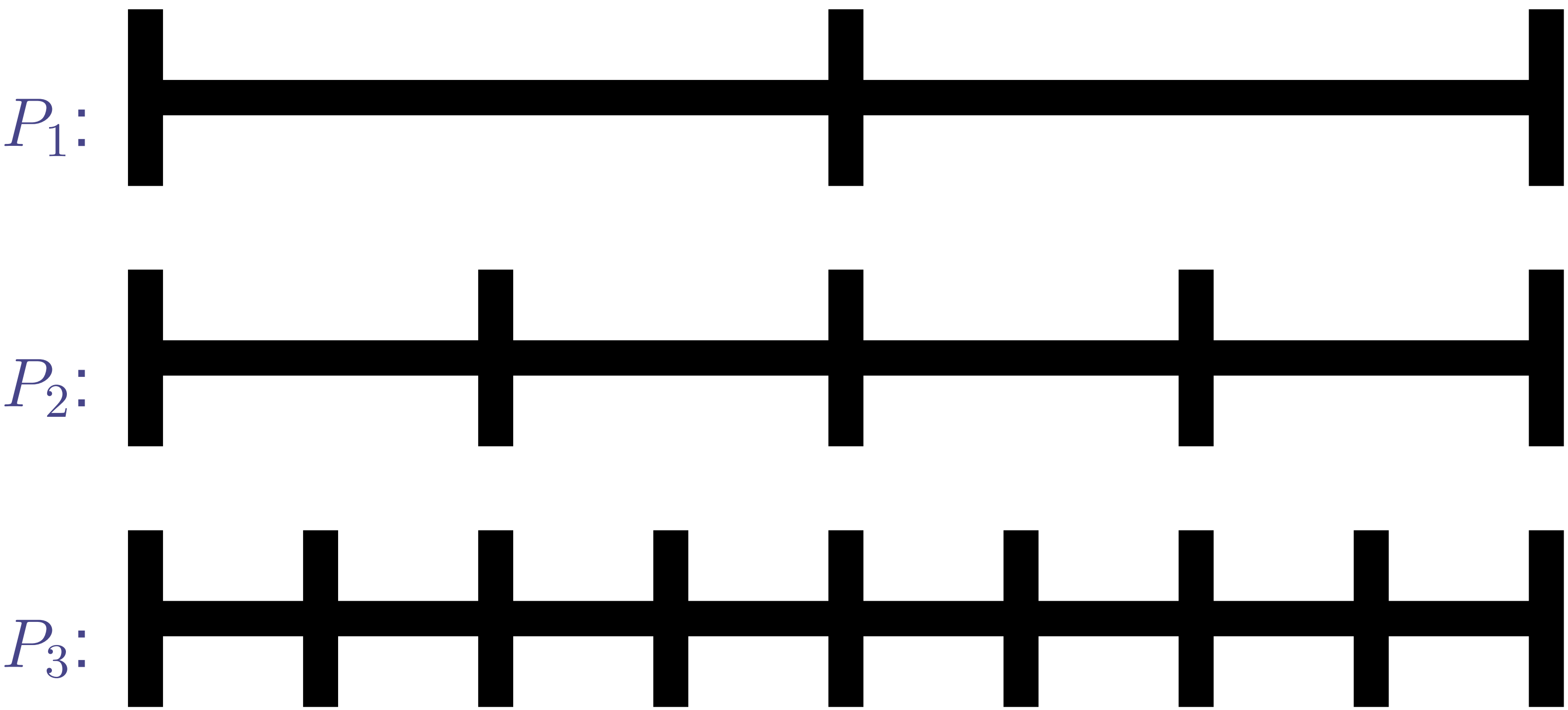


P_2:



Podziały odcinka

Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a, b]$, ograniczoną.
Przedział $[a, b]$ możemy dzielić na coraz to mniejsze przedziały:



Definicja całki

Skonstruujmy teraz ciąg podziałów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ na równe podprzedziały (o długości Δx_m). Załóżmy, że są to coraz drobniejsze podziały ($\Delta x_m \to 0$).

Definicja całki

Skonstruujmy teraz ciąg podziałów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ na równe podprzedziały (o długości Δx_m). Załóżmy, że są to coraz drobniejsze podziały ($\Delta x_m \to 0$).
Każdemu podziałowi P_m przyporządkowujemy liczbę S_m przybliżającą (przy takim podziale) pole pod wykresem:

$$S_m = \sum_i f(c_i)\Delta x_m \ ,$$

gdzie c_i — punkt w $i-$tym podprzedziale.

Definicja całki

Skonstruujmy teraz ciąg podziałów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ na równe podprzedziały (o długości Δx_m). Załóżmy, że są to coraz drobniejsze podziały ($\Delta x_m \to 0$).
Każdemu podziałowi P_m przyporządkowujemy liczbę S_m przybliżającą (przy takim podziale) pole pod wykresem:

$$S_m = \sum_i f(c_i)\Delta x_m \ ,$$

gdzie c_i — punkt w $i-$tym podprzedziale. Jeśli ciąg S_m jest zbieżny do S (niezależnie od wyboru punktów c_i) to S nazywamy całką z $f(x)$ na przedziale $[a, b]$.

Definicja całki

Definicja:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \sum_i f(c_i)\Delta x_m$$

Jeśli powyższa granica istnieje, to nazywamy ją *całką z funkcji* $f(x)$ *w granicach od* a *do* b. Dla funkcji ciągłej i przedziału skończonego całka zawsze istnieje (funkcje ciągłe są całkowalne).

Definicja całki

Definicja:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \sum_i f(c_i)\Delta x_m$$

Jeśli powyższa granica istnieje, to nazywamy ją *całką z funkcji* $f(x)$ *w granicach od* a *do* b. Dla funkcji ciągłej i przedziału skończonego całka zawsze istnieje (funkcje ciągłe są całkowalne).

Zwykle w tym kontekście mówi się o „całce oznaczonej” (na danym przedziale), w odróżnieniu o „nieoznaczonej” (będzie później).

Definicja całki

Definicja:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \sum_i f(c_i)\Delta x_m$$

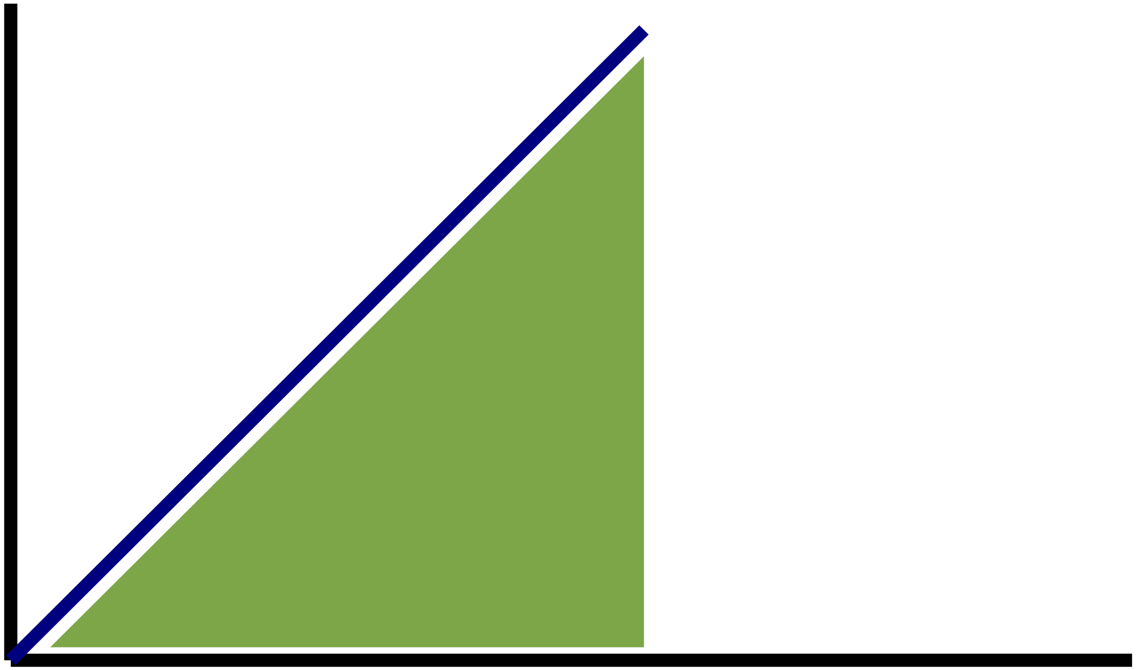
Jeśli powyższa granica istnieje, to nazywamy ją *całką z funkcji* $f(x)$ *w granicach od* a *do* b. Dla funkcji ciągłej i przedziału skończonego całka zawsze istnieje (funkcje ciągłe są całkowalne).

Zwykle w tym kontekście mówi się o „całce oznaczonej” (na danym przedziale), w odróżnieniu o „nieoznaczonej” (będzie później).
Całka to uogólnienie operacji dodawania. Znak całki to stylizowana litera S (od „summa”).

Przykład

Obliczmy pole trójkąta, czyli

$$\int_0^1 x \mathrm{d}x$$



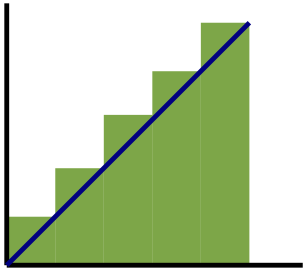
Przykład (c.d.)

Wybieramy coraz drobniejsze podziały odcinka $[0, 1]$ na podprzedziały.
Niech P_n będzie podziałem na n równych części. Wtedy mamy:

Przykład (c.d.)

Wybieramy coraz drobniejsze podziały odcinka $[0, 1]$ na podprzedziały.
Niech P_n będzie podziałem na n równych części. Wtedy mamy:

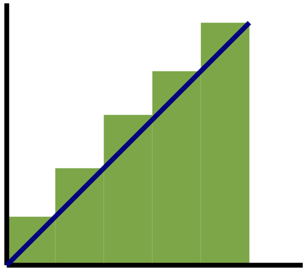
$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} \underbrace{\frac{i}{5}}_{f(c_i)} \underbrace{\frac{1}{5}}_{\Delta x_5} = \frac{60}{100}$$



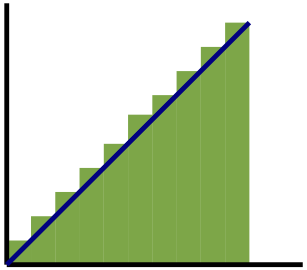
Przykład (c.d.)

Wybieramy coraz drobniejsze podziały odcinka $[0, 1]$ na podprzedziały.
Niech P_n będzie podziałem na n równych części. Wtedy mamy:

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} \underbrace{\frac{i}{5}}_{f(c_i)} \underbrace{\frac{1}{5}}_{\Delta x_5} = \frac{60}{100}$$



$$S_10 = \sum_{i=1}^{10} \underbrace{\frac{i}{10}}_{f(c_i)} \underbrace{\frac{1}{10}}_{\Delta x_10} = \frac{55}{100}$$



Przykład (c.d.)

Wzór ogólny:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n)$$

Przykład (c.d.)

Wzór ogólny:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$S_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Przykład (c.d.)

Wzór ogólny:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$S_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\int_0^1 x \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Własności całki oznaczonej

Rozszerzanie obszaru całkowania:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Własności całki oznaczonej

Rozszerzanie obszaru całkowania:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Wyciąganie czynnika stałego:

$$\int_a^b k f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Własności całki oznaczonej

Rozszerzanie obszaru całkowania:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Wyciąganie czynnika stałego:

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Całka sumy

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x$$

Zamiana granic całkowania

Przyjmuje się następującą umowę:

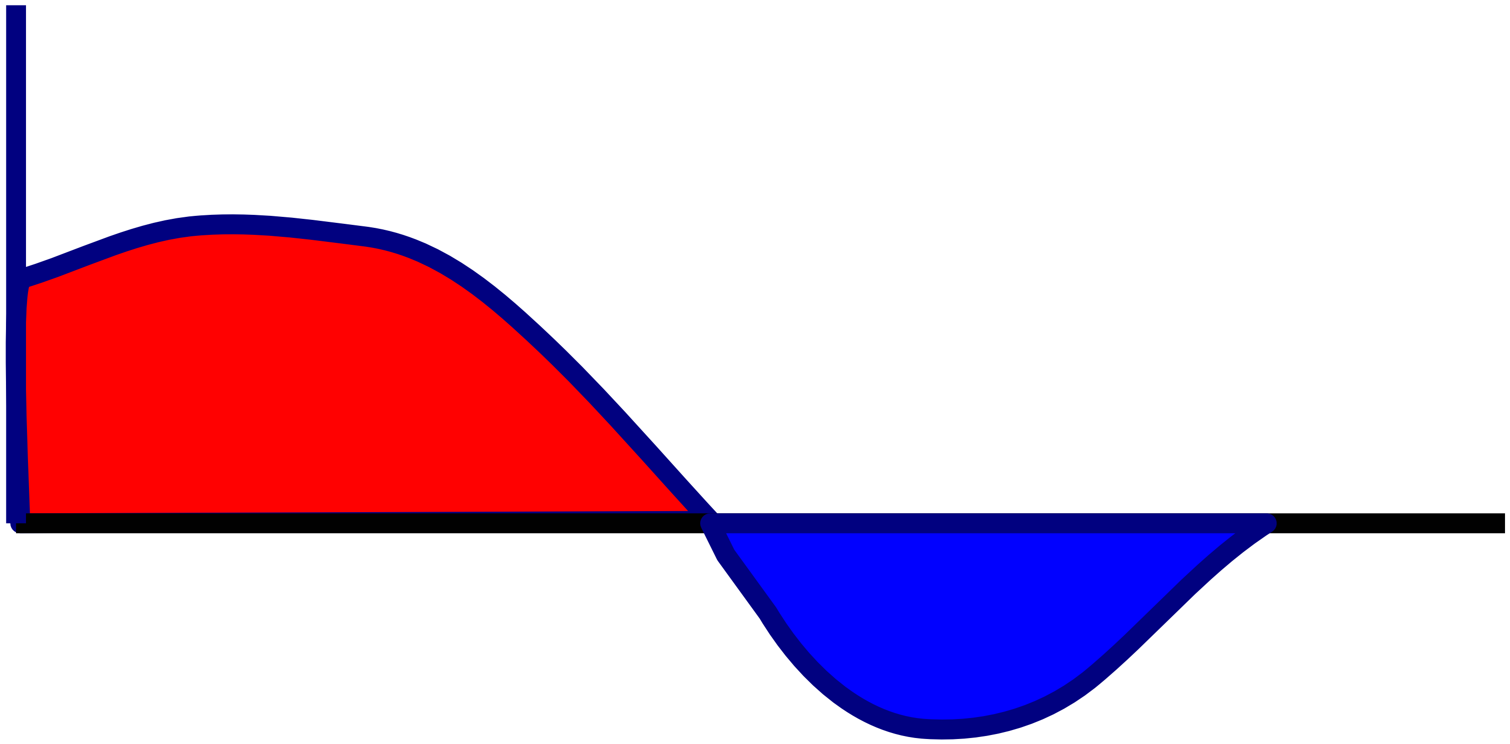
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Wówczas wzór na rozszerzanie obszaru całkowania obowiązuje zarówno dla $a < b < c$ jak i dla innych sytuacji, np.:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$$

Funkcje zmieniające znak

Co się dzieje, jeśli obliczamy całkę funkcji, która na pewnym przedziale jest dodatnia, a na innym ujemna?



Wówczas pole obszarów nad osią x bierzemy ze znakiem plus, a pole pod osią ze znakiem minus.

Przykład

Ile wynosi całka z funkcji sinus po pełnym okresie?

$$\int_0^{2\pi} \sin x = ?$$

Przykład

Ile wynosi całka z funkcji sinus po pełnym okresie?

$$\int_0^{2\pi} \sin x = ?$$

Pola nad osią i pod osią są sobie równe, zatem

$$\int_0^{2\pi} \sin x = 0$$

Jakie funkcje można całkować?

Wiemy już, że funkcje ciągłe są całkowalne.

Jakie funkcje można całkować?

Wiemy już, że funkcje ciągłe są całkowalne. Okazuje się jednak, że całkować można również niektóre funkcje nieciągłe:

jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła we wszystkich punktach przedziału $[a, b]$ z wyjątkiem skończonej liczby, to jest całkowalna.

Jakie funkcje można całkować?

Wiemy już, że funkcje ciągłe są całkowalne. Okazuje się jednak, że całkować można również niektóre funkcje nieciągłe:

jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła we wszystkich punktach przedziału $[a, b]$ z wyjątkiem skończonej liczby, to jest całkowalna.

Jakie są zatem przykłady funkcji niecałkowalnych?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \qquad\quad \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Podstawowe twierdzenie

Z powyższej, geometrycznej definicji całki nie widać, jak można obliczać całki bardziej skomplikowanych funkcji.

Podstawowe twierdzenie

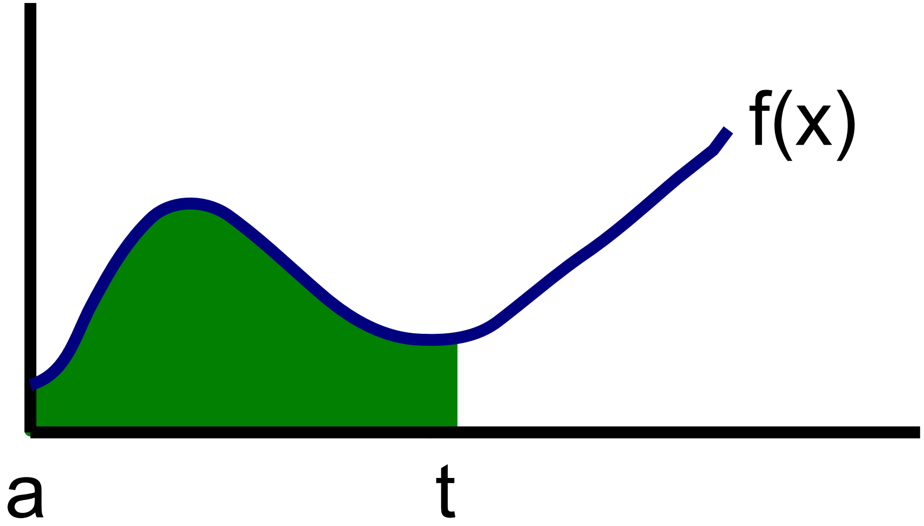
Z powyższej, geometrycznej definicji całki nie widać, jak można obliczać całki bardziej skomplikowanych funkcji.

Okazuje się jednak, że obliczanie całek to operacja odwrotna do obliczania pochodnych:

Podstawowe twierdzenie

Z powyższej, geometrycznej definicji całki nie widać, jak można obliczać całki bardziej skomplikowanych funkcji.

Okazuje się jednak, że obliczanie całek to operacja odwrotna do obliczania pochodnych:



$$F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = f(t)}$$

Funkcja pierwotna, całka nieoznaczona

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję $F(x)$, której pochodna jest równa $f(x)$, tzn.

$$F'(x) = f(x) \; .$$

Funkcja pierwotna, całka nieoznaczona

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję $F(x)$, której pochodna jest równa $f(x)$, tzn.

$$F'(x) = f(x) \ .$$

Dwie funkcje, które mają równą pochodną, mogą się różnić co najwyżej o stałą, np.

$$(x^2)' = 2x \ , \qquad (x^2+5)' = 2x \ .$$

Funkcja pierwotna, całka nieoznaczona

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję $F(x)$, której pochodna jest równa $f(x)$, tzn.

$$F'(x) = f(x) \ .$$

Dwie funkcje, które mają równą pochodną, mogą się różnić co najwyżej o stałą, np.

$$(x^2)' = 2x \ , \qquad (x^2+5)' = 2x \ .$$

Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną $f(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Całka nieoznaczona a oznaczona

Znając całkę nieoznaczoną funkcji $f(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

możemy obliczyć całkę oznaczoną:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Całka nieoznaczona a oznaczona

Znając całkę nieoznaczoną funkcji $f(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

możemy obliczyć całkę oznaczoną:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Oznaczenie:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Przykład

Przykłady całek nieoznaczonych:

$$\int x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \text{bo } \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

Przykład

Przykłady całek nieoznaczonych:

$$\int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \text{bo } \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad \text{bo } (\sin x)' = \cos x$$

Przykład

Przykłady całek nieoznaczonych:

$$\int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \text{bo } \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad \text{bo } (\sin x)' = \cos x$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C, \qquad \text{bo } (x)' = 1$$

Przykład

Przykłady całek nieoznaczonych:

$$\int x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \text{bo } \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad \text{bo } (\sin x)' = \cos x$$

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C, \qquad \text{bo } (x)' = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \qquad \text{bo } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Przykład

Obliczanie całki oznaczonej — wróćmy do pola trójkąta:

$$\int_0^1 x \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$

Przykład

Obliczanie całki oznaczonej — wróćmy do pola trójkąta:

$$\int_0^1 x \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$

Spróbujmy obliczyć pole ograniczone osią x układu współrzędnych, prostymi $x = 1$, $x = 2$ i parabolą (wykresem funkcji $y = x^2$):

$$\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Przykład (c.d.)

Ile wynosi pole ograniczone wykresem funkcji sinus i osią x?

$$\int_0^{\pi} \sin x = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) =$$

$$= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Własności całek nieoznaczonych

Całka nieoznaczona ma pewne własności całki oznaczonej: wyciąganie czynnika stałego:

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$$

całka sumy:

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = \int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x$$

Przykład:

$$\int (x+2)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

Metody obliczania całek

Wiele całek możemy obliczyć, odwracając wzory na pochodne:

Funkcja $f(x)$	Całka $\int f(x)\mathrm{d}x$
0	C
1	$x + C$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$

Przykłady

W praktyce dążymy do tego, aby funkcję podcałkową przekształcić do postaci, którą można znaleźć w tablicach całek.

Przykłady

W praktyce dążymy do tego, aby funkcję podcałkową przekształcić do postaci, którą można znaleźć w tablicach całek.

$$\int x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x =$$

Przykłady

W praktyce dążymy do tego, aby funkcję podcałkową przekształcić do postaci, którą można znaleźć w tablicach całek.

$$\int x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int x^3\mathrm{d}x - 3\int x^2\mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{d}x =$$

Przykłady

W praktyce dążymy do tego, aby funkcję podcałkową przekształcić do postaci, którą można znaleźć w tablicach całek.

$$\int x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int x^3\mathrm{d}x - 3\int x^2\mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C =$$

Przykłady

W praktyce dążymy do tego, aby funkcję podcałkową przekształcić do postaci, którą można znaleźć w tablicach całek.

$$\int x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int x^3\mathrm{d}x - 3\int x^2\mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C$$

Zastosowania geometryczne całki

Znamy już podstawową interpretację geometryczną całki — składanie, sumowanie z „nieskończenie małych części” pola powierzchni. Inne zastosowania geometryczne całki to na przykład:

- obliczanie objętości brył
- obliczanie długości krzywej

Obliczanie objętości brył

Załóżmy, że dana jest bryła obrotowa, powstała z obrócenia wykresu funkcji $f(x)$ na odcinku $[a, b]$ (na przykład połowa kuli, powstała z obrócenia wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ na odcinku $[0, 1]$).
Wówczas objętość tej bryły jest dana wzorem

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

Obliczanie objętości brył

Załóżmy, że dana jest bryła obrotowa, powstała z obrócenia wykresu funkcji $f(x)$ na odcinku $[a, b]$ (na przykład połowa kuli, powstała z obrócenia wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ na odcinku $[0, 1]$).
Wówczas objętość tej bryły jest dana wzorem

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

Na przykład objętość połowy kuli o promieniu 1:

$$V = \pi \int_0^1 (1 - x^2)\mathrm{d}x = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\pi$$

Obliczanie długości łuku

Jeśli krzywa dana jest równaniem postaci $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$, przy czym funkcja $f(x)$ jest gładka, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

Obliczanie długości łuku

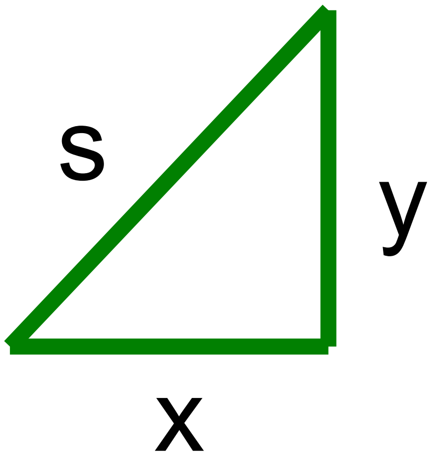
Jeśli krzywa dana jest równaniem postaci $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$, przy czym funkcja $f(x)$ jest gładka, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

Ten wzór można interpretować jako graniczny przypadek twierdzenia Pitagorasa.

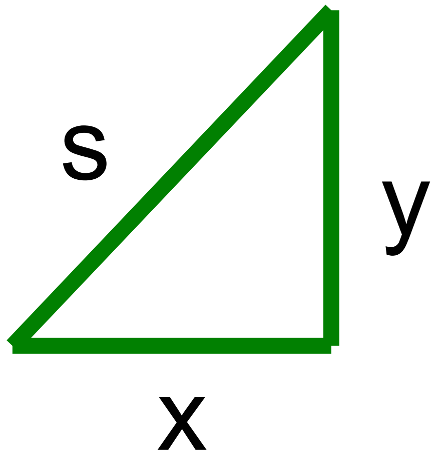
Obliczanie długości łuku (c.d.)

Dla trójkąta prostokątnego mamy $s^2 = x^2 + y^2$:

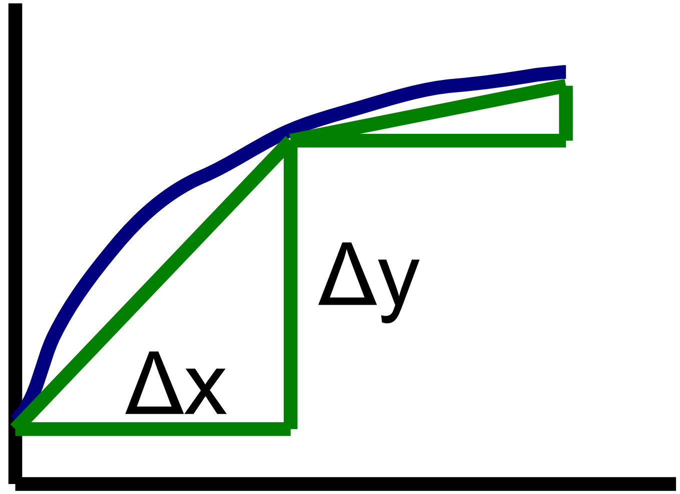


Obliczanie długości łuku (c.d.)

Dla trójkąta prostokątnego mamy $s^2 = x^2 + y^2$:



Gładką krzywą możemy przybliżyć przez łamaną i sumować długości przeciwprostokątnych: $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$



Całkowanie przez części

Niech f i g będą funkcjami gładkimi. Wówczas zachodzi następujący wzór:

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int gf'\mathrm{d}x$$

Jest to wzór na całkowanie przez części (wyrażenie podcałkowe dzielimy na dwie części: f i g). Wzór ten często przydaje się do obliczania całek.

Przykład

Obliczmy całkę

$$I = \int x \sin x \, \mathrm{d}x$$

Przykład

Obliczmy całkę

$$I = \int x \sin x \mathrm{d}x$$

Przyjmujemy $f = x$, $g' = \sin x$, mamy $I = \int f g' \mathrm{d}x$.

Przykład

Obliczmy całkę

$$I = \int x \sin x \mathrm{d}x$$

Przyjmujemy $f = x$, $g' = \sin x$, mamy $I = \int f g' \mathrm{d}x$.
Obliczamy: $f' = 1$, zaś $g = -\cos x$.

Przykład

Obliczmy całkę

$$I = \int x \sin x \mathrm{d}x$$

Przyjmujemy $f = x$, $g' = \sin x$, mamy $I = \int f g' \mathrm{d}x$.
Obliczamy: $f' = 1$, zaś $g = -\cos x$.
Całkujemy przez częsci i dostajemy:

$$I = fg - \int f' g \mathrm{d}x$$

Przykład

Obliczmy całkę

$$I = \int x \sin x \mathrm{d}x$$

Przyjmujemy $f = x$, $g' = \sin x$, mamy $I = \int f g' \mathrm{d}x$.
Obliczamy: $f' = 1$, zaś $g = -\cos x$.
Całkujemy przez częsci i dostajemy:

$$I = fg - \int f' g \mathrm{d}x$$

$$I = -x \cos x - \int (-\cos x) \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + C$$

Całkowanie przez podstawienie

Inną bardzo przydatną metodą całkowania jest całkowanie przez podstawienie (całkowanie przez zamianę zmiennych). Wzór ten wynika ze wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

gdzie

$$u = g(x)$$

Przykłady

Obliczmy całkę

$$I = \int 2(x^2 + 25)^4 x \mathrm{d}x$$

Przykłady

Obliczmy całkę

$$I = \int 2(x^2 + 25)^4 x \mathrm{d}x$$

Pierwszy sposób: wymnażamy nawias i liczymy oddzielne całki.

Przykłady

Obliczmy całkę

$$I = \int 2(x^2 + 25)^4 x \mathrm{d}x$$

Pierwszy sposób: wymnażamy nawias i liczymy oddzielne całki.
Drugi sposób: podstawienie $u = g(x) = x^2 + 25$.

Przykłady

Obliczmy całkę

$$I = \int 2(x^2 + 25)^4 x \mathrm{d}x$$

Pierwszy sposób: wymnażamy nawias i liczymy oddzielne całki.
Drugi sposób: podstawienie $u = g(x) = x^2 + 25$.
Mamy $f(u) = u^4$, $g' = 2x$

Przykłady

Obliczmy całkę

$$I = \int 2(x^2 + 25)^4 x \mathrm{d}x$$

Pierwszy sposób: wymnażamy nawias i liczymy oddzielne całki.
Drugi sposób: podstawienie $u = g(x) = x^2 + 25$.
Mamy $f(u) = u^4$, $g' = 2x$

$$I = \int u^4 \mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^5 = \frac{1}{5}(x^2 + 25)^5$$

Przykłady (c.d.)

Obliczmy całkę

$$I = \int \sin x \cos x \mathrm{d}x$$

Zastosujemy podstawienie $u = \sin x$

Całki funkcji nieograniczonych

Dotychczas rozważaliśmy całki funkcji ograniczonych. Co stanie się, jeśli funkcja będzie dążyć do ∞ na brzegu przedziału całkowania? Jak wówczas definiujemy całkę?

Całki funkcji nieograniczonych

Dotychczas rozważaliśmy całki funkcji ograniczonych. Co stanie się, jeśli funkcja będzie dążyć do ∞ na brzegu przedziału całkowania? Jak wówczas definiujemy całkę?

Załóżmy, że w funkcja f ma w punkcie $x = a$ granicę (prawostronną *) równą ∞. Wówczas:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

to znaczy obliczamy całkę po coraz większym przedziale i badamy zbieżność takiego ciągu.

Przykłady

Czy całka z funkcji dążącej do ∞ istnieje? Okazuje się, że zależy to od wybranej funkcji. Na przykład:

Przykłady

Czy całka z funkcji dążącej do ∞ istnieje? Okazuje się, że zależy to od wybranej funkcji. Na przykład:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$$

(funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do ∞, ale „powoli").

Przykłady

Czy całka z funkcji dążącej do ∞ istnieje? Okazuje się, że zależy to od wybranej funkcji. Na przykład:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$$

(funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do ∞, ale „powoli”).
Natomiast dla $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mamy:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = -1 + \frac{1}{\varepsilon} \to \infty$$

Przykłady

Czy całka z funkcji dążącej do ∞ istnieje? Okazuje się, że zależy to od wybranej funkcji. Na przykład:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$$

(funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do ∞, ale „powoli”).
Natomiast dla $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mamy:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = -1 + \frac{1}{\varepsilon} \to \infty$$

Mówimy wówczas, że całka jest rozbieżna.
(Funkcja $\frac{1}{x^2}$ zbyt szybko dąży do ∞.)

Całki na przedziale nieskończonym

Rozważaliśmy przypadek, gdy funkcja dąży do nieskończoności. A co się dzieje, gdy funkcja jest ograniczona, a nieskończony jest przedział całkowania?

Całki na przedziale nieskończonym

Rozważaliśmy przypadek, gdy funkcja dąży do nieskończoności. A co się dzieje, gdy funkcja jest ograniczona, a nieskończony jest przedział całkowania?

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x$$

(podobnie dla $-\infty$)

Całki na przedziale nieskończonym

Rozważaliśmy przypadek, gdy funkcja dąży do nieskończoności. A co się dzieje, gdy funkcja jest ograniczona, a nieskończony jest przedział całkowania?

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\mathrm{d}x$$

(podobnie dla $-\infty$)
Zauważmy, że jeśli pole pod wykresem funkcji ma być skończone na nieskończonym przedziale, to koniecznie funkcja musi dążyć do zera.

Przykłady

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}[2\sqrt{x}]_1^M = \lim_{M\to\infty}(2\sqrt{M}-2) = \infty$$

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do zera, ale zbyt wolno.

Przykłady

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} [2\sqrt{x}]_1^M = \lim_{M\to\infty} (2\sqrt{M} - 2) = \infty$$

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do zera, ale zbyt wolno.

Natomiast dla $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mamy:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{M}\right) + 1 = 1$$

Przykłady

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{M\to\infty} [2\sqrt{x}]_1^M = \lim_{M\to\infty} (2\sqrt{M} - 2) = \infty$$

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dąży do zera, ale zbyt wolno.

Natomiast dla $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mamy:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{M}\right) + 1 = 1$$

Zauważmy, że dla tych dwóch funkcji sytuacje w zerze i w nieskończoności są odwrotne.

Równania różniczkowe

Używając całek możemy rozwiązywać równania różniczkowe.

Zadanie: upuszczamy z wysokości 1 metra kulkę. Jak wyraża się zależność jej położenia od czasu?

Równania różniczkowe

Używając całek możemy rozwiązywać równania różniczkowe.

Zadanie: upuszczamy z wysokości 1 metra kulkę. Jak wyraża się zależność jej położenia od czasu?

$$y'' = -g$$

Równania różniczkowe

Używając całek możemy rozwiązywać równania różniczkowe.

Zadanie: upuszczamy z wysokości 1 metra kulkę. Jak wyraża się zależność jej położenia od czasu?

$$y'' = -g$$

$$y' = -gt + C$$

Równania różniczkowe

Używając całek możemy rozwiązywać równania różniczkowe.

Zadanie: upuszczamy z wysokości 1 metra kulkę. Jak wyraża się zależność jej położenia od czasu?

$$y'' = -g$$

$$y' = -gt + C$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

Równania różniczkowe

Używając całek możemy rozwiązywać równania różniczkowe.

Zadanie: upuszczamy z wysokości 1 metra kulkę. Jak wyraża się zależność jej położenia od czasu?

$$y'' = -g$$

$$y' = -gt + C$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

Stałe C i D wyznaczamy z warunków początkowych (położenie = 1, prędkość = 0).